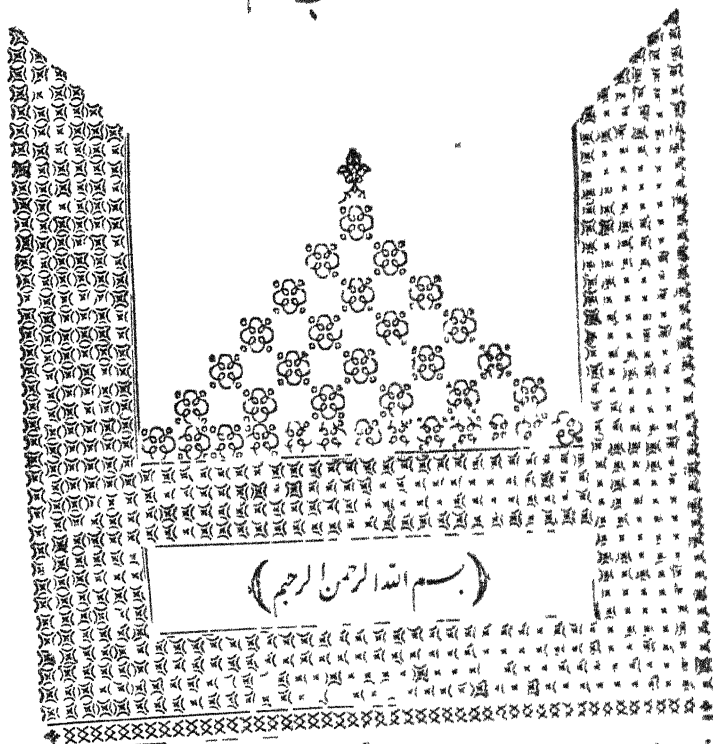


حساب التفاضل والتكامل  
ترجمة انتيرميخود بن احمد مدرّس العلوم  
الفلكية بمدرسة المهنة بمخانة  
الخطوية السكّانية ببولاق  
مصر المحمية

7150  
518



تبعها على غير هاردا انتهاء بإنشاء ما أتبع من الآثار حسنة الخليفة \* ولما تر  
الخلية الخليفة \* التي لا تحصر ولا تحصى \* ولا تستقرى ولا تستقصى \* مع  
تجديد مدارس من معالم العلوم والفنون ، وطاعة رماخى من سرها المصون  
المكثور \* حيث أوجدنا فيها بأسرها \* وحياها بحسرها \* رثاها \* بعد أن  
محيت آثارها مددا مديده \* وعت رسوما زمنية مديده \* حتى أبسها حلة  
الكحل \* وأفرغها في قلب الحس والجمال \* فكأت سبيلك بريرة \* ومازلت  
على العزيز بعزير \* ولما كان العم الرابض من حسن تلك العلوم وإبهاها  
وابهجها تيك الفنون و رهاها \* وكنت منذ دخلت هذه المدرسة و نأفقي  
في عداد التلامذة \* ما فتئت أتعلم حتى سرت في أمن لئلا تندر وقت بوظيفة  
التدريس مدة سنين \* مستغلا ببل الاحسان ولله يحب عسير \* تعاملت  
مع الطلبة احسن التعامل \* وقرتهم كتاب الموسىو بشارلا في حساب  
التفاضل وتكامل \* وحيث انى لوحظت بأعين العايد \* وسرلى الله سبيل  
الهداية \* بادرت الى عمارته العرساوية بالترجمة والتعريب \* ونظمها فى سلك  
براعة التسميل والتعريب \* حيث بسطت بعض اعمارات \* ووفعتها بإريادة على  
ما فى الاصل من المشارات \* فجاءت على طرف انعام لتجديتي \* لتتناولها  
يد الطالب المبتدى \* ونزعتها عن العز والحجر \* ومثلتها بلبعا بمطبعة الخمر  
ثم انى ضمنت اليها دروفون \* تعفى في مطها فرشد \* يكاد ينفعا فى علم المكايث  
وعيره \* مما يلوح وجه ثمرته وخبره \* والحقت بها تبة فى علم السوء الجميلة  
الشان \* فلهذا جئت دصر مدرسته \* ن \* رهو حصرته مديريك صاحب  
ابراعه \* الخمر راقص السنتى ديارين ابراعه \* ولما دت كتاب الترجمة كتابا  
عظيما \* وصارت بها تين الصمحتين عتد انما \* وذى جناب العالى \* ذوالهم  
والمعالى ، مردها بعد الجامع بين المعارف والمعارف \* والتالذ من الجند  
والطارف \* المعارف باذان الصون منطوقة ومفهوما \* امير اللواء ادهم بيلك  
مدير المدارس عموما \* قد شرفها باطلاعه الشريف عليها \* واسعدا بنظره  
السعيد اليها \* صدر اجمعه انكر بمطبعها \* ارادة لكثير ثمرتها ونفعها \* حيث



فحمد الله \* ونسبهم على تمجيدك بتفاضل النعم \* والانساب \* وتكرمتك بتكامل  
 مازقة نعيم حساب \* ونصلي ونسلم على نبيك الذي جاء بالدوال \* القواطع \*  
 واغت لهاية اكبرى منخرته السواطع \* هندوس انباء انباء الامم الخالية \*  
 ومهندس مجارى بجزر الشريعة بالهندسة العالیه \* من أقام بما ارشدنا اليه \*  
 من اساس معرفتك الحدود \* ورسم جيوب طل كرمك الطليل الممدود \* صلى  
 لله وسلم عليا \* وعلى آله لواصلين الى طرق الهيايات \* واصحابه البالغين في كليات  
 المنعادات اقصى الغايات \* وبعد فيقول الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم  
 الهندسية \* في مدرسة دار الهندسة الداووية الملكية \* الكريمة ببولاق مصر  
 الخضروسة \* سرف الله عنهما كاره الدهر وبؤوسه \* ان نكارم الحضرة الاصفية  
 الحديثية \* والدولة المنجدية العلوية \* قد تدفق بحر احسانك المديد الكامل  
 بعم اسرار مصرية بديضة العميم الشامل \* فرد على ملكتها ضالتها \* واعاد اليها

## المعلم تبلور

وبالنظر الى هذا المعنى ليست طريقة الصغريات جاثا الاعبارة عن طريقة مستقرة لايجاد تفاضلات البوان المتسوقة وبها تنقطع تلك التفاضلات في الاذهان بواسطة اشكال هندسية في غاية ببساطة واختصار تظهر للعقل على وجه اوضح من التصورات المطلقة التخيلية وباجلها فهذه الطريقة تصير ضرورية لا بد منها ولا غنى عنها في التروع العالية من علم الميكانيك والفلك اذ بدونها يكون حل المسائل العملية من المشكلات الصعبة في اغلب الاحيان ومن ثم كان افاضل علماء الهندسة يستعملونها كثيرا في مؤلفاتهم

وقد كل فيما سلف من الزمان لهذه الطريقة رثرف نوجرد الكرى محامون قد بلوا الجهد في الذب عنها وذلك لما انه اذ استزم الانسان السلوك فيها على مقتضى بعض دعاوى مخصوصة تظهر عليها علامة الحدة والضبط الياثى التام ويتراى عليها انها ناتجة بالطبع عن اصل عام وقاعدة كمية ترجع اليها وهذه القاعدة المذكورة لم تزل الى الآن معتبرة من الضروريات اكن لما رأيت اننا اذا اعتبرنا اللانهاى بالوجه المقتدر فيه لم نجد الله ينج عنها نتائج لا يمكن قبولها استحسن ان ابرهن عليها الجاهل طريقة الصغريات جاثا اصلا آخر هو مبنى كذلك على ما علم لناس الفوائد المتعلقة باللانهاى انه هو اقرب الى الصواب بسبب تصورات النهايات التى توجد فيه ضمنا

وانما كانت طريقة النهايات مقبولة لطريقة الصغريات جاثا بسبب ما يوجد فيها من الخلل فان طريقة معلم الجرانجه مبنية كذلك لطريقة النهايات وذلك بربط المعاملات التفاضلية بالجبر فخص ولا بأس بيبعل هذه الطرائق الاربع كأنها طريقة واحدة ولذلك اذا قابلها ترى ان الاصول المتأخبة عنها مشتركة بين جميعها وان من اراد فهمها كلها ليس عليه ان يضم شيئا قليلا الى طريقة النهايات فقط وتقول طريقة المعلم لاجرانجه حينئذ الى ان تكون عبارة عن نظرية صارت منه جاثا حيث غيرت طريقة اثباتها

ولم التزم بوضع النظريات المتسوقة التى تتركب منها هذه الرسالة وانما التزمت

\* (٤) \*

ليس منها ردها \* وعلم انها قد بلغت أشدها \* فدونهاها ايها الطالب \* يسر الله  
في ذلك كل مطلب \* آمين اللهم آمين \* يارب العالمين  
\* (مقدمه) \*

قول المؤلف من قبل في تاريخ المعارف وجد فيه ان القريحة البشرية تقه  
وقد بعدت ترتي في أعلى الادراكات والاختراعات كأن مانعا يمنعها من  
رتتها ثم عود وترتي ثانيا بقرنة اخرى فتظهر باسته كشاف عظيم من  
له تشيؤات اتي تغبر بها صورة العلم بالكلية \* وان من هذا القبيل ما اخترعه  
العلم ديارته وديكارنوس من تطبيق الخبر على الهندسة فانه افتتح بذلك  
طريقا كانت مجهولة لاسلافه من العلماء \* ومنه ايضا ما اغرب به المعلم فوطون  
رالمعلم آسره على علماء بلاد اوربا من اختراع تحليل اخر اعلى درجة من  
العلم ديكارنه اذ لا يتيسر استكشاف اخر يكون به تشريف العقل  
بشرى منه حيث صار الانهائي الذي هو مجرد تخيل مستطيعا للحساب  
\* ثبت منه ما عجب وقادار بعض من الفلاسفة ان يوقعوا التشكك في صحة  
هذا التحليل الخبيث فلم يبلغوا ذلك ولم يتيسر لهم ان ينكروا نتائجه ولم يترتب  
من ذلك ما رآه من علماء الهندسة من زيادة بل الجهد في البحث عن  
حقيقة لوجود الذكرى الحسابات الهندسية وكان اول من علم هذا السر هو المعلم  
فولون \* حيث جعل حساب التفاضل طريقة للوصول الى اول نسب الكميات  
وحررها عن جعبها طريقة للوصول الى نهايات النسب ثم جاء المعلم دالمير  
فرى ان سورس المعلم فوطون مشقة على حقيقة الوجود الفكري  
لحسابه \* من رآه في تيسر براسطة طريقة النهايات ان يحصل التوضيح  
في طريقة الوجود عند ذلك لا يقطع النظر عن التحزن الذي هو معنى  
للعلم له بحسابه من قبل ردة الحكم فوج من علماء الهندسة قبل المعلم دالمير  
ومرورهم على من يثبت نهايات منهم المعلم كوزن خصوصا ولكن لم يحصل  
الانضام باسم ردة اشك بالكمية عن الوجود الفكري لطريقة الصغريات جذا  
اقي من عبارة عن اختصار طريقة النهايات الامند حصل اثباتها بواسطة نظرية

## حساب التفاضل تفاضل كميات الجبرية

\* ١ \* حساب التفاضل يبحث فيه عن التفاضل متى نشأ عن الكميات إذا أخذ بعض متغيراتها زيادةً والمتغير ما أصبح تغيره في المعادلة كميات ثابتة ماثت على حالة غير متغيرة بطول العملية معلوماً كان أو مجهولاً ويقال للمتغير دالة للمتغير الآخر متى ساوى القول كمية حسابية يدخل فيها الثاني بارتباط إياها كان فإن  $v$  في معادلات

$$v = \sqrt{a - s^2} \text{ و } v = s^2 - 3 \text{ ب } s$$

$$\text{و } v = s^2 \text{ و } v = b + s^2 \text{ هي دالة } s$$

\* ٢ \* ولنعبر دالة في حالة ازديادها بازدياد للمتغير الشاملة هي  $v$  فإن كل

دالة للمتغير  $s$  يمكن بيانها برأى  $s$  فنحن  $s = m$  (شكل ١) وليكن

لأجل ذلك  $a = s$  و  $m = v$  ونفرض أن  $a$  أح

يأخذ زيادة  $a = h$  و  $m$  يصر عند ذلك  $m = v$

ولأجل إيجاد مقدار هذا الرأى  $s$  نريد يشاهد أنه يلزم تغيير  $s$  بكمية

$s + h$  في معادلة المنحنى  $s = a$  رار  $v$  الذي يستخرج منها يكون

هو عين مقدار  $v$  فإذا كانت معادلة  $v = m$  مثلًا يوجد

$v$  بتغيير  $s$  بكمية  $s + h$  و  $v$  بالآخر  $v$

ويكون  $v = m + s + h$  و  $s + h = m + h$

\* ٣ \* ولناخذ الآن معادلة  $v = s^2$  و ..... (١)

ونفرض فيها أن  $v$  تَصير  $v$  حرة بتغيير كمية  $s$  بكمية  $s + h$

فيحدث لنا  $v = (s + h)^2$  وبحملها يوجد

$$v = s^2 + 2sh + h^2$$

وبطرح معادلة (١) من هذه المعادلة يوجد

$$v - s^2 = 2sh + h^2$$

\* (٦) \*

توضيح سائر العمليات كما سلكت هذا المسلك في سائر مؤلفاتي الرياضية لما في متحقق ان تركها لا يترتب عليه زيادة الاعتقاد في كثرة معارف المؤلف وان المؤلف انما يعرف مقامه بما يديه من كيفية الدلالة على تصوراته وبما يقرره من الملاحظات المخترعة في مؤلفاته

ولنضم الى ما قرره انه اذا التزم عدم ترك التصورات المتخالفة في صلب النظريات لا يمكن اجتناب التطويل المحل بها الا بواسطة الضبط والتحرير ويزيد الامر اشكالا اذا كان بعض الكتاب معدا للبرهنة على المسائل وابداء اسبابها ومن اطلع على كثرة المواد المتنوعة المقررة في هذا الكتاب عرف حق المعرفة ما يصدر لي من الموانع في تأليفي له ومن الزيادات التي ضممتها الى هذا الكتاب في هذه الطبعة الجديدة مسألة النقط الغريبة والنهايات الكبرى والصغرى للدوال ذات المتغيرتين والمنحنيات القطبية ونظرية المتغيرة المستقلة او التي ليست بمعققة والحلول الخصوصية للمعادلات التفاضلية وتكميم الاجسام المنتهية بالسطوح المنحنية وتربيع السطوح المذكورة وشرط تكامل الدوال ذات الثلاث متغيرات والمعادلات التفاضلية بدرجة ثانية والمعادلات المتماثلة وغير ذلك وبالجمله فقد ختمت هذا المؤلف في نسبة تتعلق بالمعادلات التفاضلية الجبرية مع بعض ملحوظات عمومية على دوال الاختيارية تتمها تكاملات تلك المعادلات وبهذا توصلت الى شرح الطريقة التي تتعين بها الدالة الاختيارية التي تدخل في المعادلة عند توفر معادلات الشرط واعلامها والطريقة التي يبحث بها عن تلك المسألة المهمة معتبرا السطوح المنحنية تشابه الطريقة التي استعملتها باعتبار الثوابت الاختيارية ولذا بينت بواسطة المنحنيات كيف توجد الثابتة بعينها للتكامل بعد ان حذف ذلك الثابتة عند اخذ التفاضل وهي مسألة يظهر لي انه لم يحظ بها احد قبلي

(1).....  $\tau_{\text{eff}} = \frac{\tau_{\text{eff}}}{\tau_{\text{eff}}}$

على ه يوجد

$\frac{ص}{ه} = ٣ س + ٣ سه + ه$  (٢) .....  
 وحيث كانت كمية  $\frac{ص}{ه}$  —  $ص$  تبين الزيادة التي تأخذها كمية  $\frac{ص}{ه}$   
 حين تزداد كمية  $س$  بمقدار ه يعلم من ذلك ان كمية  $\frac{ص}{ه}$  —  $ص$  هي  
 نسبة الزيادة التي تأخذها الدالة المفروضة  $ص$  الى الزيادة التي ياخذها  
 متغير  $س$

واذا نظرنا الى الطرف الثاني من هذه المعادلة فنشاهد ان هذه النسبة تأخذ  
 في النقصان كلما نقصت كمية ه وحين تصير كمية ه صفرا تؤول هذه  
 النسبة الى ٣ س<sup>٢</sup> ويعلم من ذلك ان حد ٣ س<sup>٢</sup> هو نهاية النسبة  
 $\frac{ص}{ه} - ص$  وهذا الحد هو الذي ينبغي نحوه كلما اخذ ه في النقص  
 \* ٤ \* لكنه بفرض ه = ٠ تؤول كمية  $\frac{ص}{ه} - ص$  الى  
 صفرا ايضا فمعادلة (٢) تؤول حينئذ الى هذه

$$\div = ٣ س^٢ \dots\dots\dots (٣)$$

ولا استعمال في هذه المعادلة لانه يفهم من البرهان  $\div$  قد يكون دالا على سائر  
 انواع الكميات فتارة يستدل به على كمية محدودة وتارة يبين كمية غير محدودة  
 وتارة يكون صفرا ولك ان تقول انه حيث كانت قيمة الكسر لا تعبر بقسمة  
 حديه على عدد واحد ينتج ان تصغير الحدين غير ضار في مقداره وينبئ على ذلك  
 ان حقيقة الكسر لا تتغير اذا بلغ حدها النهاية في الصغر يعني اذا انعدما  
 وكسر  $\div$  الذي يوجد في معادلة (٣) هو عبارة عن رسم حل محل نسبة زيادة  
 الدالة الى زيادة المتغير وحيث لم يبق هذا الرسم اثرا للمتغير المذكور لزم ابداله برمز

و<sup>ص</sup> ليعلم به ان الدالة كانت  $ص$  والمتغير كان  $س$

و<sup>ص</sup> و<sup>س</sup> يتغير اعتبارهما في الحقيقة على حسب جنس المسألة  
 فقد يعتبران اصفارا عدما وقد يعتبران كميات صغيرة جدا ويوجد اذ ذلك

و<sup>ص</sup>





\* (١٣) \*

ونفرض انهما يكونان بعد الترتيب بالنسبة الى ه هكذا

$$\text{صه} = \text{صه} + \text{ده} + \text{ده} - \text{ره} + \dots + \text{لخ} \quad (٥)$$

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{ده} - \text{ده} + \text{ره} + \dots + \text{لخ} \quad (٦)$$

فبالارتقاء الى النهاية يوجد

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واع}}{\text{واسه}} = \dots = \frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} \quad (١)$$

وبضرب معادلتى (٥) و (٦) فى بعضهما يوجد

$$\text{ع} \cdot \text{صه} = \text{ع} \cdot \text{صه} + \text{ع} \cdot \text{ده} + \text{ع} \cdot \text{ده} - \text{ع} \cdot \text{ره} - \dots - \text{ع} \cdot \text{لخ}$$

$$+ \text{صه} \cdot \text{ده} + \text{صه} \cdot \text{ده} - \text{صه} \cdot \text{ره} - \dots - \text{صه} \cdot \text{لخ}$$

$$- \text{صه} \cdot \text{ده} - \dots - \text{صه} \cdot \text{لخ}$$

ثم انه داطرح ع صه من كل من الطرفين وقسم - رن عن ه يوجد

$$\frac{\text{صه}}{\text{واسه}} - \frac{\text{ع}}{\text{واسه}} = \frac{\text{ع} + \text{ده} - \text{صه} - \text{لخ}}{\text{واسه}} = \frac{\text{ع} - \text{صه}}{\text{واسه}} + \frac{\text{ده} - \text{لخ}}{\text{واسه}}$$

رلايجب اذ نهاية النسبة ينرض ه = ٠ فيحدث

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{ع}}{\text{واسه}} + \frac{\text{ده} - \text{لخ}}{\text{واسه}}$$

(ووضع النقطة فى ه) ع صه يدل على انه يراى خذتنا مثل ع صه) ثم نضع

فى هذه المعادلة عوضا عن د و د سقايرها الممنعة بعادلتى (٧) فنجد

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} - \frac{\text{ع}}{\text{واسه}} = \frac{\text{ده} - \text{لخ}}{\text{واسه}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} + \frac{\text{ده} - \text{لخ}}{\text{واسه}}$$

$$\text{يوجد أن ه} \cdot \text{واسه} = \text{ع} \cdot \text{واسه} + \text{ده} \cdot \text{واسه} - \text{لخ} \cdot \text{واسه}$$

ويفهم من ذلك انه لايجب اننا نضع صه من ضرب سقير يرم ضرب كل نسبا

فى تفاضل الاخر ثم يجمع الماوسل

\* ١٥ \* وبواسطة هذه الطريقة يوجد بسهولة حاصل ضرب

لانه متغيرات ولذا ينرض صه ر سقلا ويوضع ع ر س

ومن بعد الذى تمقدم يوجد



第(10)讲

واذا وضعنا في الطرف الثاني عوضا عن مساوئها  $\frac{ص}{ص}$  -  $\frac{و}{و}$  -  $\frac{س}{س}$  -  $\frac{ع}{ع}$  يوجد  
 $\frac{ص}{ص} = \frac{و}{و} - \frac{س}{س} - \frac{ع}{ع}$  وباشتراك المقام يكون  
 $\frac{ص}{ص} = \frac{و}{و} - \frac{س}{س} - \frac{ع}{ع}$  وخيرا  $\frac{ص}{ص} = \frac{و}{و} - \frac{س}{س} - \frac{ع}{ع}$   
 أو  $\frac{ص}{ص} = \frac{و}{و} - \frac{س}{س} - \frac{ع}{ع}$

(فی تفاضل المتغیر ذی الأس)

٢١٦ - يعوم من ذلك ان تضاف لتعريف الألف يساويها  
مضروب فيه بألف الاصلى لا الواحد واسم على ضرب من  
\*) (بـ تـ سـ)

$$و٠ صه ل = صه و ل + لى صه ٠٠٠٠٠٠٠ (٨)$$

وحب كن ل = ع ز بأخذ تفاضله حكم المقرر يكون

$$و٠ = ع و ل + و ل ع$$

و- ارضعنا في معادلة (٨) عوضا عن ل و ل لمقادير الاخيرة

$$يوجدن و٠ صه ر = صه ع و ل + صه و ل ع + ع و ل صه$$

و ش هـ حينئذ ان الطريقة المتقدمة تجري ايضا على تفاضل حاصل ضرب

ثلاث متغيرات يعنى انه لايجاد هذا التفاضل يكتب حاصل ضرب صه ر

وبغير فيه كى ستغير تفاضله على التوالي وحاصل جمع الحواصل الحادثة يكون

هو التفاضل المطلوب

١٦ \* وهذه القاعدة عامة لايجاد تفاضل حاصل ضرب اى عدد

كل من المتغيرات

١٧ \* حيث ان تفاضل كمية حه هو ح و ل صه يعلم من ذلك

اندمق توجد كمية ثابتة في حاصل ضرب ينفى ان يؤخذ تفاضل حاصل الضرب

بصرف النظر عن المضروب الثابت ثم بعد اخذ التفاضل يضرب الناتج

في الكمية الثابتة ومن ثمة نأخذ تفاضل كمية حه صه مثلا

$$ح و ل صه + ح و ل صه$$

١٨ \* والكمية الثابتة ليس له تفاضل لانه اذا فرض

$$صه = حه ب ثم اجريت عملية (بند ٧) ظهر أن و ل صه = ح و ل صه$$

وهذا الناتج هو عين الناتج الذى ينتج اذا لم يكن للشاينة ب وجود

\*(في تفاضل الكسر)

$$صه و ل صه - صه و ل صه$$

١٩ \* تفاضل كسر صه يساوى

$$و ل صه = ع ثم نحذف المقام فيوجد$$

$$صه - صه ر و ل صه (بند ١٤) يكون و ل صه = صه و ل ع$$

$$+ ع و ل صه ر - ح و ل صه ع = و ل صه - ع و ل صه$$

واذا



ومن بعد (بند ١٥) يوجد  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$

$\frac{1}{10} \text{ م} + \frac{1}{10} \text{ م} + \frac{1}{10} \text{ م} = 1000$  بعدد م فيكون

$\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$

\* ٢٢ \* وإذا سلمت صدقة على المتخلف الذي يكون له

كسرا وما لا يلزمه على ذلك، فخذ أولا  $\frac{1}{10} \text{ م}$  ونضع  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$  ثم

رفع كلا من الطرفين إلى  $\frac{1}{10} \text{ م}$  فيكون  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$  وتأخذ تفاصل

كل من الطرفين (بند ٢١)  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$   $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$

وبقي من ذلك  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$

وإذا رجعنا هذه المعادلة عن  $\frac{1}{10} \text{ م}$  و  $\frac{1}{10} \text{ م}$  فيكون  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$

يكون  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$   $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$   $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$

وحيث أن  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$  فنزول المعادلة إلى

$\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$  ونضع مقدار  $\frac{1}{10} \text{ م}$  بدلا عنه يوجد

$\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$   $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$   $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$

وهذا ما أردنا، ولاجل إثبات المعادلة التي يكون فيها الأثناس سلبا فرض

$\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$  ونزل نزول إلى  $\frac{1}{10} \text{ م} = \frac{1}{10} \text{ م}$  ثم تأخذ التفاضل بقاعدة

الكسور بناء على (بند ١١) نجد



$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بعدم من ذلك ان تفاضل المتغير المجذور الى درجة ما يساوى تفاضل المتغير مقسوما على درجة الجذر مضروب في الجذر بـ رتبته الاصلية لكن تكون الكمية الموضوعة تحت الجذر مرفوعة الى درجة الجذر ناقصة واحدا

\* ٢٤ \* قد تكون الدالة صـ والمتغير صـ غير مبدئين بمعادلة رحدة كما في صـ = د ع و ع = د ص مثلا

والطريقة الاولى التي تصح ولايجاد المكرر التفاضلي  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  تكون بجذف

ع صـ من بين هاتين المعادلتين حتى يمكن تطبيق قاعدة التفاضل واجراءها

عليها لانه يمكن ايجاد المكرر التفاضلي  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  من اول وعلة بدون احتياج

الى هذه العملية الاولى ولنشرع في ذلك ~~ف~~ نقول نفرض انه بتغير صـ بكمية

صـ + هـ في معادلة ع = د صـ بتغير ع بكمية ع + ك

ثم انه اذا وضعت ع + ك محل ع في معادلة صـ = د ع

تتبدل صـ متغيرة بكمية صـ ويكرن اذن

ع = د (صـ + هـ) و صـ = د (ع + ك)

ثم بعد ذلك يمل الطرفان الاخير ان لهاتين المعادلتين ويفرض ان النواتج تكون

مرتبة بـ ب التوى التصاعدي فيحصل من ذلك

$$ع = د (صـ + هـ) + ل هـ + ل هـ + ل هـ + ل هـ + ل هـ + ل هـ$$

$$صـ = د (ع + ك) + ل ك + ل ك + ل ك + ل ك + ل ك + ل ك$$

وهـ جـ د م بعد ذلك يمل كيتي ع و صـ في الاطراف الاول وقسمة

النتيجة على هـ و ك ان

ع

\*(٢١)\*

وبضرب هذين المكثرين المتضامير في بعضهما يوجد

$$\frac{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}}{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}} = \frac{1}{\text{س} - \text{ح} - \text{س}} \quad \text{وَص} \text{ يكون}$$

$$\frac{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}}{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}} = \text{وَص}$$

وبمعنى بضاضا ص = (ح + دس) فلاجل يجب المتضامير

$$\text{ح} + \text{دس} = \text{ع} \quad \text{فيحدث من ذلك معادلتا}$$

$$\text{ص} = \text{ع} \quad \text{و} \quad \text{ع} = \text{ح} + \text{دس} \quad \text{و} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

$$\frac{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}}{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}} = \frac{\text{ع} = \text{ح} + \text{دس}}{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}} = \text{وَص} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

وبضرب هذين المكثرين المتضامير في بعضهما يوجد

$$\frac{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}}{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}} = \frac{\text{م} - \text{دس} = \text{ع}}{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

$$\frac{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}}{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}} = \frac{\text{م} - \text{دس} = \text{ع}}{\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}} = \text{وَص}$$

$$\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

$$\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

$$\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

$$\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

$$\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

$$\text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س} \quad \text{وَص} = \text{س} - \text{ح} - \text{س}$$

وباستبدال مع بمقدارها نأول المعادلة الأخيرة لى

الصورة

$$صه = د ع \text{ و } ع = د سه$$

يكفي ان تستخرج المكتررات  $\frac{واصه}{واع}$  و  $\frac{واع}{واسه}$  التفاضلية من هاتين

المعادلتين ثم تضرب النواتج في بعضها وحاصل الضرب الحادث يكون هو مكترر

$$\frac{واصه}{واسه} \text{ التفاضل المطلوب}$$

$$* ٢٥ * \text{ فاذا فرضنا مثلاً } صه = ٣ ع^٢ \text{ و } ع = سه^٢ + د سه^٣$$

$$\text{ فيحدث من ذلك } \frac{واصه}{واسه} = ٦ ع \text{ و } \frac{واع}{واسه} = سه^٣ + ٢ د سه^٢$$

وبضرب هذين المكتررين في بعضهما يكون

$$\frac{واصه}{واسه} = ٦ ع (سه^٣ + د سه^٢) = (سه^٣ + د سه^٢) ٦ ع$$

$$* ٢٦ * \text{ قانون (١٣) يستعمل بكثرة في أخذ تفاضل الكميات}$$

العسرة ولتمثيل بعض منها فنقول

$$\text{ نبعث عن إيجاد تفاضل } صه = ع^٢ - سه^٢ \text{ فذلك يؤول الى إيجاد}$$

$$\text{ المكترر التفاضلي } \frac{واصه}{واسه} \text{ ولذا نضع } ع^٢ - سه^٢ = ع \text{ فيكون بناء عليه}$$

$$صه = ع^٢ = ع \cdot ع^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ ومعادلتا } صه = د ع \text{ و } ع = د سه \text{ (بند ٢٤) تؤولان}$$

$$\text{ حينئذ الى } صه = ع \cdot ع^{\frac{1}{2}} \text{ و } ع = سه^{\frac{1}{2}} - سه^{\frac{1}{2}}$$

فماخذ تفاضل كل من طرفيهما (بند ٢١) يوجد

$$\frac{واصه}{واع} = \frac{1}{ع} \cdot \frac{1}{ع^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{ع^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(سه^{\frac{1}{2}} - سه^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} \text{ و } \frac{واع}{واسه} = سه^{\frac{1}{2}} - سه^{\frac{1}{2}}$$

وبضرب

لَا تَنْتَهِبُوا مِمَّا رَزَقَ الْكَافِرِينَ مِنْ شَيْءٍ قَلِيلٍ يُصَلُّونَ عَلَيْهِ  
مِنْ شَيْءٍ قَلِيلٍ يُصَلُّونَ عَلَيْهِ  
فِي تِلْكَ الْأَمْثِلِ لِقَوْمٍ أَعْيُنُهُمْ أَغْمِضْتُ لَعَلَّهُمْ يَرْجِعُونَ  
(فِي الْأَمْثِلِ لِقَوْمٍ أَعْيُنُهُمْ أَغْمِضْتُ لَعَلَّهُمْ يَرْجِعُونَ)





٢٤)\*

محدث هذه المكثرات باخذ التفاضلات المتوالية لكمية  $u$  باعتبار  
 كمية  $u$  فيه، باينة وبما ان نقول حيث ان  $u = v$   $u$   $v$   
 وبأخذ تفاضل كل من الطرفين باعتبار  $u$  ثابت يوجد  
 $u = v$   $u \times v$  وكان  $u = v$   $u$   $v$  فيوجد  
 $u = v$   $u \times v = v$   $u$   $v$  ومنه يستخرج  
 $u = v$   $u$   $v$  وكذا بأخذ تفاضل طرفي معادلة  $u = v$   $u \times v$   
 باعتبار  $u$  ثابتة يوجد  $u = v$   $u \times v$  وبسبب  
 مساواة كمية  $u$  الى  $u$   $v$  يكون  
 $u = v$   $u \times v = v$   $u$   $v$  ومنه يحدث  
 $u = v$   $u$   $v$  وهلم جرا

(تنبيه) رموز  $u$   $v$  و  $u$   $v$  الخ تدل على التفاضل الثاني  
 والثالث الخ لكمية  $u$  وذلك عبارة عن تفاضل التفاضل وتفاضل تفاضل  
 التفاضل الخ  
 وما  $u$   $v$  و  $u$   $v$  الخ فتدل على تربيع او تكعيب الخ  
 كمية  $u$

(في نظرية مكوران)\*

\* ٣١ \* لتكن  $u$  دالة لمتغير  $u$  فاذا رتبنا هذه الدالة  
 بالنسبة للقوى التصاعدية لهذا المتغير وكان الناتج  
 $u = v$   $u$   $v$   $u$   $v$   $u$   $v$   $u$   $v$  الخ (١٦)  
 ثم أخذنا التفاضلات المتوالية لهذه الدالة وجدنا بعد القسمة على  $u$   
 $u = v$   $u$   $v$   $u$   $v$   $u$   $v$   $u$   $v$  الخ

\* (٢٧) \*

$$\frac{s}{s^2 + r^2} \cdot \frac{1}{r} = s \cdot \frac{1}{r} - (s^2 + r^2) \cdot \frac{1}{r} = \frac{واص}{واس}$$

$$\frac{s^2 \cdot \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}}{(s^2 + r^2)} = s^2 \cdot \frac{1}{r} - (s^2 + r^2) \cdot \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} = \frac{واص^2}{واس^2}$$

$$\frac{s^3 \cdot \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}}{(s^2 + r^2)} = s^3 \cdot \frac{1}{r} - (s^2 + r^2) \cdot \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} = \frac{واص^3}{واس^3}$$

واذا فرضنا  $ق = \frac{1}{r}$  ، نؤول هذه المقادير الى  $ص = \frac{1}{r}$

$$\frac{s^2 \cdot \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}}{r^2} = \left( \frac{واص}{واس} \right) \quad \text{و} \quad \frac{s}{r} = \left( \frac{واص}{واس} \right)$$

$$\text{وبوضعها في قانون (١٧) نؤول هذا}$$

القانون الى

$$\frac{s^3}{s^2 + r^2} + \frac{s^2}{r^2 + s} - \frac{s}{r^2} + r = \frac{واص^3}{واس^3}$$

\* (المثال الثالث) \*

ولناخذ  $ص = (س + ر)$  مثلاً نالانفجدياً بجراه

التفاضل

$$\frac{واص}{واس} = م (س + ر)^{-1}$$

$$\frac{واص^2}{واس^2} = م (1 - م) (س + ر)^{-2}$$

$$\frac{واص^3}{واس^3} = م (1 - م) (2 - م) (س + ر)^{-3}$$

\* (٢٦) \*

\* (المثال الأول) \*

\* ٣٢ \* حل كمية  $\frac{1}{س+٢}$  بواسطة قانون مكلوران نضع  
صه =  $\frac{1}{س+٢}$  فنجد باخذ تفاضل الطرفين

$$\frac{1}{س+٢} - \frac{1}{س+٢} = \frac{(س+٢) \times 1 - 1(س+٢)}{س(س+٢)} = \frac{0}{س(س+٢)}$$

وبقسمة الطرفين على  $س$  يوجد

$$\frac{1}{س(س+٢)} - \frac{1}{س(س+٢)} = \frac{0}{س^2(س+٢)}$$

وباخذ التفاضل ثانيا وثالثا الخ يحدث من بعد القسمة على  $س$

$$\frac{1}{س^2(س+٢)} = \frac{2(س+٢)}{4(س+٢)} = \frac{1}{2س}$$

$$\frac{1}{س^3(س+٢)} - \frac{1}{س^3(س+٢)} = \frac{2(س+٢) \times 2}{6(س+٢)} - \frac{1}{3س}$$

ثم نفرض  $س = ٠$  في مقادير صه و  $\frac{1}{س}$  و  $\frac{1}{س^2}$  الخ

$$\frac{1}{س^2} = \left( \frac{1}{س} \right) - \frac{1}{2} = \left( \frac{1}{س} \right) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{س^3} = \left( \frac{1}{س^2} \right) - \frac{1}{2س} = \left( \frac{1}{س^2} \right) - \frac{1}{2س}$$

ثم نضع هذه المقادير ومقدار صه الحادث بفرض صه = ٠ ايضا  
في قانون (١٧) فيحدث لنا

$$\frac{1}{س+٢} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3س} + \frac{1}{4س^2} - \frac{1}{6س^3} + \text{الخ}$$

\* (المثال الثاني) \*

\* ٣٣ \* صه =  $\frac{1}{س+٢}$  فنضع صه =  $\frac{1}{س+٢}$  ونجد

وترتب هذه بالنسبة الى هـ لكن بدون اجراء العملية لاننا لم نخرج الالحدود  
المضروبة في اول قوى هـ وبالتأمل يذهر انه اذا فرض حاصل هذه الصورة  
هـ (هـ-١) (هـ-٢) (هـ-٣) الخ بحيث يكون احد جزييه  
(هـ-١) (هـ-٢) (هـ-٣) الخ يترك من مضارب عدتها  
خل هذا الجزء من بعد نظر المعادلات يكون هكذا

$$هـ + ١ هـ^{١-٢} + ب هـ^{٢-٣} + ٠٠٠ م هـ + ١$$

وحد هـ يكون مركبا من حاصل ضرب الاجزاء الثانية -١ و-٢ و-٣ الخ  
لذوات الحدين هـ -١ و هـ -٢ و هـ -٣ الخ  
ويكون لامحالة

$$هـ (هـ-١) (هـ-٢) (هـ-٣) الخ = هـ (هـ + ١ هـ^{١-٢} + م هـ + ١)$$

ومن البين ان الحد المشتق على هـ بدرجة اولى في هذا الحاصل هو

$$هـ (١ - ١ \times ٢ - ٢ \times ٣ - ٣ \times ٤) الخ هـ$$

منه انه لايجاد الحدود المتبوعة بأول قوى هـ في الحدود الصعبة في حل

(١٨) وهي من الحد الثالث فصاعدا تشكل مكدرات هـ المختلفة بالوجه

الآتي وهو أن مكتر هـ يتركب من حاصل ضرب الاعداد المجردة عن هـ

$$٠ في ٠ للحد الثالث وفي ١ للحد الرابع وهلم جرا وينسئ على$$

$$ذلك ان ١ = هـ + (١ - ١ + ١ - ١ + ١ - ١) الخ هـ + الحدود$$

المحتوية على هـ و هـ<sup>٢</sup> الخ

$$واذا رمزنا بحرف ح لكمية (١ - ١ + ١ - ١ + ١ - ١) الخ يحدث لنا$$

$$١ = هـ + ح + الحدود المحتوية على هـ و هـ<sup>٢</sup> و هـ<sup>٣</sup> الخ$$

واذا وضعنا هذا المقدار في معادلة صه = هـ الت هذه المعادلة

\* (٢١)

وإن س = ٠ . يقول مقدار س إلى ح يعنى انه يوجد (ص) = ٢

وتقول كورت : ضمنية  $\frac{ق}{س}$  و  $\frac{ق}{ق}$  الخ

$$\left( \frac{ق}{س} \right) = م \quad و \quad \left( \frac{ق}{س} \right) = م (م-١) >$$

$$\left( \frac{ق}{س} \right) = م (م-١) (٢-م) > \quad و \quad \text{وتوضع هذه المقادير في}$$

قانون (١٧) فيوجد

$$م + م + م = م (م-١) (٢-م) >$$

$$م + م (م-١) (٢-م) > + الخ$$

\* (في تفاضل الكميات العالية)

٣٥ \* الكمية العالية هي التي تكون متبوعة بس منغير

وإنه ريم أو جيب وجيب تمام وما أشبه ذلك

\* ٣٦ \* ولنفرض أولاً ان المراد إيجاد تفاضل هذه الكمية >

ولذلك نضع ص = > ثم نغير كمية س بكمية س + هـ .

فتغير كمية ص بكمية ص' وتقول هذه المعادلة الى

$$ص' = ص + هـ \quad أو \quad ص' = ص \times هـ$$

ثم نحل كمية > بالنسبة لتوى هـ ولا يتيسر ذلك بقانون للكمية ذات

الحدين إلا يجعل > = ١ + د ومن ثم يكون

$$١ = (١ + د) = ١ + هـ + هـ (١ - هـ) + هـ (١ - هـ) (٢ - هـ) +$$

$$+ هـ (١ - هـ) (٢ - هـ) (٣ - هـ) + الخ \cdot (١٨)$$

وترتب

\*(٣١)\*

ويجعل  $س = ٠$  يوجد

$$١ = خ = ١$$

$$٢ = \left( \begin{matrix} \text{واحد} \\ \text{س} \end{matrix} \right)$$

$$٣ = \left( \begin{matrix} \text{واحد} \\ \text{س}^٢ \end{matrix} \right)$$

$$٤ = \left( \begin{matrix} \text{واحد} \\ \text{س}^٣ \end{matrix} \right) \dots \dots \dots$$

وبوضع هذه المقادير في قانون (١٧) يوجد

$$١ = ١ + \frac{٢}{١} س + \frac{٣}{١} س^٢ + \frac{٤}{١} س^٣ + \dots \dots \dots$$

وحيث انه بأخذ متغير  $س$  ي مقدار كل ثابت غير متغير  $ح$  الثابت  
فيكون ان تضع  $س = \frac{١}{ح}$  وتقول المعادلة لا حرة فيكون

$$١ = ١ + \frac{٢}{١} \frac{١}{ح} + \frac{٣}{١} \left( \frac{١}{ح} \right)^٢ + \frac{٤}{١} \left( \frac{١}{ح} \right)^٣ + \dots \dots \dots$$

ثم نرمز للطرف الثاني من هذه المعادلة برمز  $هـ$  فتؤول الى

$$١ = ١ + \frac{٢}{ح} هـ + \frac{٣}{ح^٢} هـ^٢ + \frac{٤}{ح^٣} هـ^٣ + \dots \dots \dots$$

من اذ ينريه جـ

$$١ = ١ + \frac{٢}{ح} هـ + \frac{٣}{ح^٢} هـ^٢ + \frac{٤}{ح^٣} هـ^٣ + \dots \dots \dots$$

$$١ = ١ + \frac{٢}{ح} هـ + \frac{٣}{ح^٢} هـ^٢ + \frac{٤}{ح^٣} هـ^٣ + \dots \dots \dots$$

وعنده المعلوم مقداره بمعادلة  $١ = ١ + \frac{٢}{ح} هـ + \frac{٣}{ح^٢} هـ^٢ + \frac{٤}{ح^٣} هـ^٣ + \dots \dots \dots$

هو اني اتخذه  $١$  يغير اساسا سبب جـ وول لو غار تمثله المتغيرة  
بالاوغرافات الطبيعية او الرياضية وتدي  $١$  تنفي بالعمرة حدود لاول من

الى ص = ح = ح + الحدود المحتوية على ه<sup>٢</sup> وعلى ه<sup>٣</sup> وعلى ه<sup>٤</sup> الخ  
 وذا طرحنا المعادلة الارلية التي هي ص = ح من هذه المعادلة يبق  
 ص - ص = ح = ح + الحدود المحتوية على ه<sup>٢</sup> و ه<sup>٣</sup> و ه<sup>٤</sup> ٠٠ الخ  
 وبالارتقاء الى النهاية يوجد  $\frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح}$  وبوضع مقدار ص

$$\text{عوضا عنها يوجد } \frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح} \dots\dots\dots (١٩)$$

كمية ح الثابتة تتعلق بكمية ح لانه اذا وضعنا عوضا عن د  
 مقدارها الذي هو ١ - ح في معادلة

$$ح = (د - \frac{د^2}{2} + \frac{د^3}{6} - \frac{د^4}{24} + \dots\dots\dots) \text{ حدث}$$

$$ح = (١ - ح) - (١ - ح)^2 + (١ - ح)^3 - (١ - ح)^4 + \dots\dots\dots (٢٠)$$

\* ٣٧ \* ولتشرع في كيفية ايجاد مقدار آخر سهل للكمية ح

الثابتة ولذلك نبحث عن حل كمية ح بواسطة قضية كاوران فيكون  
 منه  $\frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح}$

$$\frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح}$$

$$\frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح}$$

$$\frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح}$$

ويجعل

هـ بالنسبة للوغاريتم الطبيعي الى البت اساسه هـ  
لماذا كن هذا المماس حيث ان تقاطع  $\frac{1}{2}$  مثلا فانه يوجد

$$\text{لواء } \frac{1}{2} = 1 - \text{زيكون} \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \text{لواء}$$

في تناضل بلويوب وجيوب امام تركذ باق المخطوط المساحية  
رنته، ضل احوال القوسية

\* ٣٩ \* انظر من جيبه واصغر من طله ابداء ولا ثبات ذلك  
نرض قوسه اب (٢٠٠) فليب هذا القوس يكون سو وطله  
يكون دا ثم اخذتيس  $\frac{1}{2}$  هـ ربا  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ يكون خطا  
مستقيما رثا ثم رخت  $\frac{1}{2}$  هـ وان يكون نصف هذا المستقيم وهو  
الجيب سو  $\frac{1}{2}$  هـ من نصف هذا المثلث وهو  $\frac{1}{2}$  هـ اعني قوس الجيب  
واما ثبات كون الدلي اكبر من قوسه فهو ان تقول حيث ان مثلث  $\frac{1}{2}$  هـ  
اكبر من قطاع  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  
وباستط  $\frac{1}{2}$  هـ دن لافزيريت  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  
الطرفين يوجد دا  $\frac{1}{2}$  هـ قوس  $\frac{1}{2}$  هـ وهما ارضا لباته

\* ٤٠ \* وينتج مما سبق ان نهاية نسبة الجيب الى قوسه  
واحد لانه متى  $\frac{1}{2}$  هـ قوس  $\frac{1}{2}$  هـ صفرا ينطبق الجيب على الدلي  
فحينطبق الجيب على القوس من باب رل ويعلم من ذلك انه يوجد ااية  
قوس  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  $\frac{1}{2}$  هـ  
جاءه  $\frac{1}{2}$  هـ

\* ٤١ \* ولايجاد تفاضل الجيب الذي قوسه سو نفرض ان هذا  
القوس يزداد زيادة قدرها هـ فيحدث بواسطة حساب المثلثات  
جا (س+هـ) = جاسه جتا هـ + جاه جتا س (٢٣)  
وبطرح جاسه بمعنى حالة الجيب الاولى من كل من طرفي هذه المعادلة

\*(٣٢)\*

متسلسلة  $1 + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$  الخ  
ويوجد حينئذ  $h = 27182818$  تقريبا وإذا رمزنا بـ  $h$   
لوح

لوح لوغاريتم  $h$  في الجلة الطبيعية أو الرائدة نجد  $h = (27182818)$

واختصارا  $h = \frac{h}{h}$  واذن  $h = \frac{h}{h}$  ولوح  $h = \frac{h}{h}$  لوح لوغاه

ويستخرج من ذلك  $\frac{h}{h} = \frac{h}{h}$  لوح وبهذا نؤول معادلة (٢١) الى

$h = \frac{h}{h}$  ومن ثم يستخرج من معادلة (١٩)

$h = \frac{h}{h}$  و  $h = \frac{h}{h}$  لوح (٢٢)

\*(في التفاضلات اللوغاريتمية)\*

\* ٣٨ \* لكن  $h$  لوغاريتم كمية  $h$  في الجلة التي اساسها

$h$  فيوجد  $h = \frac{h}{h}$  وباخذ تفاضل الطرفين (بند ٣٦) يحدث

$h = \frac{h}{h}$  ومنه يستخرج

$h = \frac{h}{h} = \frac{h}{h}$  وبضرب كئيفي الكسر الكلي في  
لوح  $h \times \frac{h}{h}$

لوح  $h$  يوجد

$h = \frac{h}{h} = \frac{h}{h}$  وبما ان  $h = \frac{h}{h}$  وكانت  $h = \frac{h}{h}$  لوح  $h$

نؤول المعادلة السابقة الى  $h = \frac{h}{h}$  لوح  $h = \frac{h}{h}$  لوح  $h$

وفي الحالة التي تؤخذ فيها اللوغاريتمات من جلة  $h$  نبيير يكون  $h = \frac{h}{h}$

ويوجد  $h = \frac{h}{h} = \frac{h}{h}$  واذن يكون  $h = \frac{h}{h}$  لوح  $h = \frac{h}{h}$

هذا







\*(٣٦)\*

ونضع موضعا من (و) جاسه و (و) جتاسه مقدير جتاسه (و)سه  
و -- جته (و)سه فيحدث من ذلك

$$\text{و} \cdot \text{داسه} = \frac{(\text{جتاسه} + \text{جاسه}) \cdot \text{و} \cdot \text{سه}}{\text{جتاسه}}$$

واذن يكون (و) دتاسه = جتاسه لان جتاسه + جاسه = ١

\* ٤٦ \* يعرف من حساب المثلثات ان نصف القطر وسط متناسب  
بين الارتفاع والوتر وبين جيب القاطع ومن ثمة كان

ظتاسه =  $\frac{\text{قاسه}}{\text{جتاسه}}$  و قاسه = جتاسه فاذا اخذتفاضل الاولى  
(بند ١٩) حدث

$$\text{و} \cdot \text{ظتاسه} = \frac{\text{و} \cdot \text{قاسه}}{\text{ظتاسه}} = \frac{\text{و} \cdot \text{سه}}{\text{جتاسه} \cdot \text{قاسه}} = \frac{\text{و} \cdot \text{سه}}{\text{جاسه}}$$

لانه يستخرج من معادلة  $\frac{\text{جتاسه}}{\text{قاسه}} = \text{ظتاسه}$  ان جتاسا = جا

\* ٤٧ \* واذا اخذتفاضل المعادلة الثانية التي هي قاسه = جتاسه

$$\text{حدث و} \cdot \text{قاسه} = \frac{\text{و} \cdot \text{جتاسه}}{\text{جتاسه}} = \frac{\text{جاسه} \cdot \text{و} \cdot \text{سه}}{\text{جتاسه}}$$

$$= \frac{\text{جاسه} \cdot \text{جتاسه}}{\text{جتاسه}} = \text{قاسه} = \text{و} \cdot \text{قاسه}$$

\* ٤٨ \* ولايجاد تفاضل قاطع التمام نأخذ تفاضل معادلة

$$\text{قناسه} = \frac{١}{\text{جتاسه}} \text{ فيوجد}$$

$$\text{و} \cdot \text{قناسه} = \frac{\text{جتاسه} \cdot \text{و} \cdot \text{سه}}{\text{جتاسه}} = \frac{١}{\text{جاسه}} \cdot \frac{\text{جتاسه}}{\text{جاسه}} = \frac{١}{\text{جاسه}}$$

$$= \text{ظناسه} = \text{قناسه} \cdot \text{و} \cdot \text{سه}$$

\* ٤٩ \* واما لايجاد تفاضل الجيب المنكوس وهو جزء نصف القطر

المحصور بين موقع الجيب والقوس فيمكن ان يؤخذ تفاضل هذه المعادلة

جا

\* (٣٩) \*

أو بجملته متغيرات وهذا لاخذ كان بالنسبة الى متغير  $س$  ثم قسم الناتج على  $واس$  كما لو كان  $صه = د س ع ر$  مثلاً فان كمية  $\frac{واس}{واس}$  فيها توجد باخذ التفاضل بحسب  $س$  يعنى باعتبار كيتى  $ع$  و  $ر$  ثابتتين ثم يقسم التفاضل على  $واس$  فيحدث من ذلك

$$\frac{واس}{واس} = \frac{د س ع ر}{واس} \text{ وكذا يوجد أن } \frac{واس}{واس}$$

$$\frac{واس}{واس} = \frac{د س ع ر}{واس} \text{ و } \frac{واس}{واس} = \frac{د س ع ر}{واس}$$

واذا فرض  $صه = س + ع$  فانه يوجد

$$\frac{واس}{واس} = \frac{د س}{واس} \text{ و } \frac{واس}{واس} = \frac{د ع}{واس}$$

\* ٥٣ \* اذا غير متغير  $س$  بكمية  $س + هـ$  في دالة بهذه الصورة  $صه = د س$  اخذ تفاضل طرفيها باعتبار كمية  $هـ$  ثابتة وكمية  $س$  متغيرة فأقول أن المكثر التفاضل لها في هذه الحالة يساوى المكثر التفاضل لها حين يؤخذ تفاضلا باعتبار كمية  $هـ$  متغيرة وكمية  $س$  ثابتة وبرهان ذلك هو أنه حيث كان بتغيير  $س$  بكمية  $س + هـ$  يوجد  $صه = د(س + هـ)$  او

$صه = د س + د هـ$  بفرض  $س + هـ = س$  فباخذ تفاضل الطرفين يكون  $واس = د س$  لكن تفاضل دالة  $س$  يتربك من حاصل ضرب دالة اخرى الى  $س$  في  $واس$

فاذا فرض ان هذه الدالة تكون  $د س$  يحدث من ذلك

$$\frac{واس}{واس} = \frac{د س}{واس} \text{ وبوضع } س + هـ \text{ عوضا عن } س \text{ يكون } \frac{واس}{واس} = \frac{د(س + هـ)}{واس}$$

ومن البين ان التغير الذي يتسبب من جعل  $س$  متغيرة و  $هـ$  ثابتة في هذا



\* ( 五 ) \*

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x^2 + 1} + \frac{B}{(x^2 + 1)^2}$$
$$(n+m) \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+m}{n} = 1 + \frac{m}{n}$$

وینج من ذلت = وینج = وینج

وَيَمْثِلُهُمْ

وہم حرا

\* ۵۵ \* :۱۰ کی تہہ - تہلی سے ۔ یہ اصل ہذا اللہ  
بالہ - بیۃ تہوی ہذا و نرس زپو - اللہ

وإذا حدثت أضرار بالهيئة لم يتغير رسمها (بعضها) إلى غيره  
فإن

ولساكن اطراف نازلان اتيں لمعاين متدوين بتحصی (شد ۵)  
 لم'ريكون الطرز انشااں مطابقا اعمی متساویں مساویا متساوی شيه  
 مكررات قوي ه المناظره جيٹ يكون

\*(٤٠)\*

ا حاصل لم يخرج عن مضروب و (س + هـ) الذي يؤول في هذه الحالة  
 الى و س في اصل ذلك يكون  

$$\frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \text{ ومنه يسخرج}$$

$$\frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \dots \dots \dots (٢٦)$$

واما اذا كانت س هي الثابتة ركية هـ هي المتغيرة فان مضروب  
 و (س + هـ) يؤول الى و هـ ويكون  

$$\frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \text{ ومنه ينتج}$$

$$\frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \dots \dots \dots (٢٧)$$

وبساواة مقدارى س (س + هـ) ببعضهما يكون  

$$\frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \text{ وهو المطلوب بيانه واشباهه}$$

من ذلك ص = س<sup>٢</sup> فانه يحل بوضع (س + هـ) محل س  
 ص = س (س + هـ)<sup>٢</sup> وبأخذ التفاضل بفرض س متغيرة  
 وعكس به يوجد

$$\frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \text{ ومن ثم } \frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ}$$

\* ٥٤ \* حيث انه بأخذ تفاضل معادلتى (٢٦) و (٢٧)  
 بالنسبة الى س + هـ توجد ايضا نتائج متساوية

$$\frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ} \text{ و } \frac{و}{س} = \frac{و}{س} \cdot \frac{س + هـ}{س + هـ}$$

فاذا جعلنا هـ ثابتة فى الاولى و س ثابتة فى الثانية يحدث

و





\* (٤٥) \*

$$٦٠ \cdot \frac{د}{هـ} = \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ}$$

\* ٦٠ \* يمكن استنتاج قانون مكلور من قانون نيولور بالوجه الآتي وهو ان تجعل  $د = ٠$  في قانون نيولور فيكون هو

$$د(د+هـ) = د \cdot \frac{د}{هـ} + \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ} + \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ}$$

وترمز برمز (د) لما تؤول اليه د حين يفرض فيها  $د = ٠$

$$\text{وبرمز } \left( \frac{د}{هـ} \right) \text{ لما تؤول اليه كية } \frac{د}{هـ} \text{ حين يفرض فيها}$$

$د = ٠$  وهلم جرا نظرا لباقي المتكررات التفاضلية فان قانون المذكور يؤول حينئذ الى

$$د هـ = د(د) + \left( \frac{د}{هـ} \right) + \left( \frac{د}{هـ} \right) \left( \frac{د}{هـ} \right) + \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ}$$

وه في هذه المعادلة تدخل في د هـ كما تدخل د في د هـ بحيث لو غيرت هـ بكمية د آت د هـ الى د هـ وحيث لم يبق اثر الى د في المعادلة الاخيرة فلا سبيل اعدم التغير وبالحقيقة فلا فرق بين وضع اى حرف مكان هـ وبين هـ ومن ثم يوجد باجراء هذا التفسير

$$د هـ = د(د) + \left( \frac{د}{هـ} \right) + \left( \frac{د}{هـ} \right) \left( \frac{د}{هـ} \right) + \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ} \cdot \frac{د}{هـ}$$

وهذا هو قانون مكلور ان

\* (في تفاضل المعادلات التي بمتغيرين) \*

$$٦١ * \text{ لتكن } د(د+هـ) = ٠ \text{ (٢٩)}$$

معادلة بمتغيرين فجعلها بالنسبة الى د يوجد

$$د هـ = د هـ \text{ واذا عوضنا هذا المقدار في معادلة (٢٩) فتؤول الى}$$

\* (٤٤) \*

صه = لوغاسه وبأخذ التفاضل يحدث

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{لوغاسه} = \frac{وا}{صه} \text{ ومنه ينتج}$$

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} \text{ ثم يوجد بالتفاضلات المتوالية}$$

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} - \frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} - \frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه}$$

وبوضع هذه المتادير في قانون تيلور يوجد

$$\text{لوغا (سه+هـ)} = \text{لوغاسه} + \frac{هـ}{صه} - \frac{هـ^2}{2صه^2} + \frac{هـ^3}{6صه^3} - \frac{هـ^4}{24صه^4} + \dots$$

\* ٥٩ \* يمكن بالسهولة إيجاد تفاضل اللوغاريتم بواسطة القانون

الآخبر اللوغاريتمى إذا فرض أن هذا القانون موجود بواسطة الجبر فقد كما هو

مبين في الملاحظة الأولى في آخر هذا الكتاب وبالحقيقة فإنه يحدث منه

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} - \frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} + \frac{وا}{صه}$$

وجيز نرتقى إلى النهاية فنجد

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه}$$

وحيث أنه قد علم تفاضل اللوغاريتم فيسهل من بعده إيجاد تفاضل صه لانه

بفرض صه = صه واخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل من الطرفين يوجد

$$\text{لوصه} = \text{لوصه} = \text{لوصه} \text{ وبأخذ التفاضل يحدث}$$

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} \text{ وينتج من ذلك}$$

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه} \text{ وبوضع صه عوضا عن صه يكون}$$

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه}$$

$$\frac{وا}{صه} = \frac{وا}{صه}$$

بذلك على إيجاد مقدار  $\frac{و}{س}$  التفاضلي كما استرأه في مثال الآتي  
 رخصت تفرش في (٢٠ و ص) = ٢٠ - ٣ ر ص - ص = ٠ (٣٠)  
 فتأخذ من ص، بأطوار مائة مرة فتأخذ مسطرة ٢٠ ر ص راء تنقسم  
 برهانها فتجد

$$٢ س و س + ٣ و ص - ٢ ص و ص = ٠ (٣١)$$

$$\text{ومنها يحدث } \frac{و}{س} = \frac{٢}{٣} = ٠.٦٦٦٦٦٦ (٣٢)$$

\* ٦٢ \* لمطابقة الطريقة التي استعملت لأجل هذا المثال مع  
 الطريقة التي استعملناها من اقل لأمر إلى الآن ينصر نه بمرق وناقص من  
 بالطريقة لأدلى ان توضع معادلة (٣٠) بهذه الصورة  
 $ص = د$

يعنى انه ينبغي حلها بالنسبة إلى ص ليستخرج منها بواسطة تفاضل مقدار  
 $\frac{و}{س}$  فبمسار هذه الطريقة نجد أولا

$$ص = ٢ \pm \sqrt{٢ + \frac{٩}{٤}} س$$

$$\frac{و}{س} = \frac{٢}{٢ + \sqrt{٢ + \frac{٩}{٤}}} \pm$$

ومقدار  $\frac{و}{س}$  هذا متبين بصورة محالمة للتي في معادلة (٣٢)  
 لكن اذا وضع مقدار ص المستخرج من (٣٠) في معادلة (٣٢)  
 يوجد

$$\frac{و}{س} = \frac{٢}{٢ + \sqrt{٢ + \frac{٩}{٤}}} \pm = \frac{٢}{٢ + \sqrt{٢ + \frac{٩}{٤}}} \pm$$

وهو كاليمين قبل ومعادلة (٣١) هي التفاضل الاقل لمعادلة (٣٠)

\* (٤٦) \*

$$\begin{aligned} \text{ك} (س, دس) &= \text{أوالى} \\ دس &= \text{اختصارا} \end{aligned}$$

هذه المعادلة الأخيرة هي متطابقة لجميع حدودها ويموجها بعضا باخذ  
س اى مقدار كان فذا لم ترد هذه المعادلة عن الدرجة الثالثة مثلا يمكن

$$\text{وضعهما كذا} \text{ ح س}^2 + \text{ح س} + \text{ب س} + \text{و} = \text{و}$$

وحيث هما متزال تحقة بأخذ متغير س اى متاركان فتتقق بوضع  
س + ه فيا عوضا عن س ويوجد حينئذ

$$\text{ح} (س + ه)^2 + \text{ح} (س + ه) + \text{ب} (س + ه) + \text{و} = \text{و}$$

ويعلم من ذلك انه متى كان دس = فلا يتوازى يكون

$$\text{د} (س + ه) = \text{بضامهما كانت كمية س هدا اذا طرحت من}$$

هذه المعادلة معادلة دس = بن

$$\text{د} (س + ه) - دس = \text{أو}$$

$$\text{د} (س + ه) - دس =$$

$$\text{ولكن} \text{د} (س + ه) = دس + \text{ح ه} + \text{ح ه} + \text{ب ه}^2 + \text{الخ}$$

$$\text{فيستخرج منه} \text{د} (س + ه) - دس = \text{ح ه} + \text{ب ه}^2 + \text{الخ}$$

وحيث كان الطرف الاوّل لهذه المعادلة صفرا فيكون

$$\text{ح} + \text{ح ه} + \text{ب ه}^2 + \text{الخ} = \text{كذلك وبالارتقاء} \cdot$$

الى النهاية يكون

$$\text{و} \cdot \text{دس} = \text{ح} = \text{و بحذف المقام يوجد}$$

$$\text{و} \cdot \text{دس} = \text{ح} = \text{و} \cdot \text{بابتداء صه يوجد}$$

$$\text{و} \cdot \text{ك} (س, و صه) = \text{ح} = \text{و} \cdot \text{صه}$$

ويعلم من ذلك انه اذا اخذ تفاضل معادلة ك (س, و صه) = باعتبار  
كمية صه فيها دالة متغير س امكن مساواة الناتج بصفر ويستعين

بذلك



ولا إيجاد المعادلة التي يعلم بها المكسر التفاضلي بدرجة ثانية يعني  $\frac{واصة}{واسر}$

تقسم حدود معادلة (٣١) على  $\frac{واصة}{واسر}$  ويجعل  $ح = \frac{واصة}{واسر}$

فتؤول هذه المعادلة الى  $ح^٢ + ح^٣ - ح^٢ - ح^٢ = ٠$   
 وإذا اعتبرنا فيها بعد ذلك كيتي  $ح$  و  $ح$  كدالتين لمتغير  $ح$  نجد  
 بواسطة التفاضل

$٢ ح + ح^٣ - ح^٢ - ح^٢ = ٠$   
 وبالقسمة على  $\frac{واصة}{واسر}$  ووضع  $ح$  عوضا عن  $\frac{واصة}{واسر}$  يوجد

$٢ + ح^٣ - ح^٢ - ح^٢ = ٠$  ومنها

يستخرج  $\frac{واصة}{واسر} = \frac{٢ - ح^٢}{٢ - ح^٣} \dots\dots (٣٣)$

المر حيث ان  $ح = \frac{واصة}{واسر}$  . ملاحظة  $\frac{واصة}{واسر} = \frac{واصة}{واسر}$

وبوضع هذه المقادير في معادلة (٣٣) عوضا عن  $ح$  و  $\frac{واصة}{واسر}$

يوجد بعد حذف المقام

$\frac{واصة}{واسر} (٢ - ح^٣) = (٢ - ح^٢) \frac{واصة}{واسر} \dots\dots (٣٤)$

وهذا هو التفاضل الثاني لمعادلة (٣٠) ولأجل إيجاد التفاضل الثالث

نجعل  $ح = \frac{واصة}{واسر}$  فتؤول معادلة (٣٣) بعد حذف مقامها الى

$$٢ - ح^٢ = ح^٢ - ح^٣$$

ثم اعتبر كيات  $ح$  و  $ح$  و  $ح$  كدوال لمتغير  $ح$  ويؤخذ

التفاضل

\* (٥١) \*

في المعادلة الاخيرة لم يكن ما خوذ بالنسبة الى  $صه$  بل هو ما خوذ بالنسبة الى  $صه$  ولا يعرف هل التفاضل في الحالة الاخيرة كالتفاضل في الحالة الاولى او لا و ارفع هذا الاشكال نقول انه قد ثبت في (بند ٢٤) ان

$$\frac{ع}{صه} = \frac{ع}{صه} \cdot \frac{ع}{ع}$$

فان افرضنا ان  $ع = صه$  فتؤول هذه المعادلة الى

$$1 = \frac{صه}{صه} \cdot \frac{ع}{ع} \quad \text{ومن هنا يحدث} \quad \frac{ع}{صه} = \frac{1}{صه}$$

وهذا يبين ان تغيير فرضية التفاضل توافقت مع الجبر وقواعد

\* ٦٨ \* ولنثبت القضية المتقدمة من ارل وهلة باثبات آخر فتقول

$$\text{ليكن} \quad \frac{صه}{صه} = ع + حه + ده + هه + زه + حه$$

$$\text{فيحدث منه} \quad \frac{صه}{صه} = ع + حه + ده + هه + زه + حه$$

وباجراء عملية القسمة على العارف الثاني او بحله بواسطة قانون مكلوران يوجد

$$\frac{صه}{صه} = \frac{1}{ع} + \frac{ح}{ع^2} + \frac{د}{ع^3} + \frac{ه}{ع^4} + \dots$$

$$\text{وفي النهاية يوجد} \quad \frac{صه}{صه} = \frac{1}{ع} + \frac{ح}{ع^2} + \frac{د}{ع^3} + \frac{ه}{ع^4} + \dots$$

$$\text{من ثبات} \quad \frac{صه}{صه} = \frac{1}{ع} + \frac{ح}{ع^2} + \frac{د}{ع^3} + \frac{ه}{ع^4} + \dots$$

(المعادلة)

\* ٦٩ \* انظر الى التي يوجد بها التباديل المماس وتحت المماس

والخط العمودي وتحت العمودي تسمى بطريقتي المماسات زلمكن لبيان ذلك

$صه$  و  $صه$  بعدا نقطة م المأخوذة من نقطة  $صه$  (٥٢)

\* (٥٠) \*

كمية  $ع$  معتبرة كدالة لمتغير  $ص$  و  $ص$  معتبرة كدالة لمتغير  $س$   
 وحاصل ضرب  $\frac{ع}{ص} \frac{ع}{ص}$  ليس التفاضل  $ع$  المأخوذ بنسبة  
 $س$  الداخلة في  $ص$

\* ٦٦ \* لما كان التفاضل الكلي دالة بحدوثه على  $س$  و  $ص$  يعلم بمعادلة

$$ع = \frac{ع}{ص} و + \frac{ع}{ص} و$$

$\frac{ع}{ص} و$  و  $\frac{ع}{ص} و$  بالتفاضلات الجزئية للدالة  $ع$   
 وكذلك اذا كانت  $ع$  دالة لمتغيرات  $س$  و  $ص$  و  $و$  الثلاث التي  
 ليست بعلاقة فانه يوجد

$$ع = \frac{ع}{ص} و + \frac{ع}{ص} و + \frac{ع}{و} و$$

$$\text{والحدود } \frac{ع}{ص} و \text{ و } \frac{ع}{و} و \text{ و } \frac{ع}{و} و$$

تكون هي التفاضلات الجزئية للدالة  $ع$

\* ٦٧ \* قد ذكرنا في (بند ٥٢) ان كمية التي ككمية  $\frac{ع}{ص}$

تبين انه اخذ تفاضل دالة  $ص$  بالنسبة لمتغير  $س$  وقسم الناتج بعد ذلك

$$\text{على } و \text{ فينتج من ذلك انه اذا وجدت معادلة } \frac{ع}{ص} = و$$

$$\text{وستخرج منها } 1 = \frac{ع}{ص}$$

فلا يمكن ان يستنتج منها  $1 = و$  بدون برهان لان التفاضل

\* (٥٣) \*

فيستخرج من المعادلة الأخيرة

$$ع ط = \frac{صه \cdot و\text{سه}}{و - و\text{سه}} \quad \text{و ز بعد (بند ٦٧) يكون}$$

$$ع ط = صه \cdot \frac{و\text{سه}}{و - و\text{سه}} \quad \text{أو وهو الأولي}$$

$$ع ط = صه \cdot \frac{و\text{سه}}{و - و\text{سه}} = \text{تحت المماس بالمرز بجرفي سه و صه}$$

لبعدى نقطة م

$$* ٧٠ * \quad \text{إذا رسمنا من نقطة م ممكراً (م) خط م م ع عموداً}$$

على م ط فنت عمودى يارت ع م وتعيينه بعبارة تناسب

$$ع ط : ع م :: ع م : ع ع \quad \text{أو}$$

$$صه \cdot \frac{و\text{سه}}{و - و\text{سه}} : ع م :: ع م : ع ع \quad \text{فيحدث منه}$$

$$ع ع = صه \cdot \frac{و\text{سه}}{و - و\text{سه}} = \text{تحت العمودى}$$

وأما من قبل انخط المماس والخط للعمودى فنعبر بمعادلتى

$$م ط = ط ع + ع م \quad \text{و}$$

$$م سه = ع ع + ع م$$

فيحدث من الأولى

$$م ط = م سه \times \frac{و\text{سه}}{و - و\text{سه}} + صه = صه \cdot \frac{و\text{سه}}{و - و\text{سه}} + ١ = \text{المماس}$$

ويحدث من الثانية

$$م سه = م ط \times \frac{و\text{سه}}{و - و\text{سه}} + صه = صه \cdot \frac{و\text{سه}}{و - و\text{سه}} + ١ = \text{العمودى}$$

فتزيد الاقنى ا ح = سه كية ح ع = ه ونرسم الرأسى ح م  
وغير بنقطى م و م قاطع م ع فمن البين انه كلما نقص ح ع  
مال خط ح ع الى الانطباق على تحت المماس ح ط ولا يزال كذلك الى  
ان يعدم ح ع = ه فيؤول ح ع الى تحت المماس ح ط  
فى النهاية ويعلم من ذلك ان ح ط هو النهاية والحد الذى يميل نحوه ح ع  
ولنبعث الآن عن المقدار الجبرى لخط ح ع ليستخرج منه نهايته ولذلك  
تنظر انه يحدث من تشابه مثلثي م م ك و م ع ح هذا التناسب

$$م ك : م :: م ع : ح ع \text{ أو}$$

$$م ك : ه :: ح ع : م ع \text{ ومنه يستخرج}$$

$$ح ع = \frac{ه م ك}{م ك} \text{ ولتعيين م ك نضع}$$

$$م ك = م ع - م ه \text{ لكن م ع = ح ع = د (سه + ه) فيكون}$$

$$م ع = ح ع = ه + \frac{ه م ك}{م ك} + \frac{ه م ك}{م ك} + \frac{ه م ك}{م ك} + \dots + \frac{ه م ك}{م ك}$$

وغير ذلك م ع = ح ع فاذا طرحنا هاتين المعادلتين من بعضهما فيوجد

$$م ع - م ع = م ك \text{ أو م ك = } \frac{ه م ك}{م ك} + \frac{ه م ك}{م ك} + \frac{ه م ك}{م ك} + \dots + \frac{ه م ك}{م ك}$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى مقدار ح ع عوضا عن م ك فنجد أن

$$ح ع = \frac{ه م ك}{م ك} + \frac{ه م ك}{م ك} + \frac{ه م ك}{م ك} + \dots + \frac{ه م ك}{م ك}$$

وبقسمة البسط والمقام على ه يكون

$$ح ع = \frac{م ك}{م ك} + \frac{م ك}{م ك} + \frac{م ك}{م ك} + \dots + \frac{م ك}{م ك}$$

وحيث انه يوجد فى النهاية ه = ٠ و ح ع يتغير بخط ح ط

فيستخرج



\* ٧١ \* ولا يجازى معادلة الخط المماس تقريبات  $\frac{ص}{ص}$  و  $\frac{ص}{ص}$  يكونان ايراداً قطعاً  $\frac{ص}{ص}$  انتهى من معادلة مستقيمة  $\frac{ص}{ص}$  المماس بنقطة  $\frac{ص}{ص}$  يمكن بيانها برسم  $\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$  (ص - ص) وكمية  $\frac{ص}{ص}$  في هذه المعادلة بين مثل زاوية  $\frac{ص}{ص}$  وطول  $\frac{ص}{ص}$  ومقدار هذا الضلع هو  $\frac{ص}{ص}$  لانه يحدث من متساوية  $\frac{ص}{ص} : \frac{ص}{ص} :: ١ : \frac{ص}{ص}$   $\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$  ويتضح من بعد ذلك ان

$$\frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} = \frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} = \frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} = \frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} = \frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}}$$

فاذا وضعنا مقدار  $\frac{ص}{ص}$  هذا في معادلة الخط المماس تقول تلك المعادلة الى  $\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$  وهي معادلة الخط المماس المطبوعة ومعادلة الخط العمودي تكون حينئذ

$$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$$

\* (تطبيق القوانين او الدساتير السابقة على الامثلة) \*

\* (المثال الاول) \*

\* ٧٢ \* المراد ايجاد تحت المماس للقطع المكافى ولذلك نأخذ تفاضل طرفي معادلة القطع المكافى التي هي  $\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$  بحسب نقطة التماس فيوجد  $\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$  ومنه يحدث

$$\frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} = \frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} \text{ و } \frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} = \frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}}$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة



\* ٧٣ \* مقدار اط (شكل ٦) الذي هو بعد راس المنحنى عن

نقطة تقابل الخط المماس بالخط الأفقي يستخرج بالسهولة من معادلة الخط  
لمماس لانه اذا جعلت رأس المنحنى لى هى ١ نقطة اصلية كان خط اط  
هو بعد هذه الرأس عن النقطة لى يكون فيها الراسى م ح صفرا وحيث ان

$$\text{معادلة المماس م ط هي } ص - ص = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (ص - ص)$$

فيكفى ان يجعل في هذه المعادلة  $ص = ٠$  ليكون مقدار  $ص$   
الحدوث منها مقدارا خط اط ويوجد اذالك

$$\text{اط} = ص = ص - ص = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} \text{ وهذا المقدار يكون هو بعد}$$

النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط لمماس بالاحداثى الافقى ولايجب ان بعد  
النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط لمماس بالاحداثى الرأسى نبحث عن  
مقدار اب بان نقول انه لما كان هذا الخط هو الرأسى الموافق الى  
 $ص = ٠$  في معادلة الخط المماس فيجب وضع  $ص = ٠$  حينئذ

$$\text{في هذه المعادلة ليحدث منها } ص = اب = ص - \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$$

ونفرض الان ان  $ص$  تصير غير منتهية وابعاد اط و اب لاتزال  
منتهية المقدار محدودة فلما ط ل (شكل ٧) لا يتقطع المنحنى حينئذ  
الا على بعد غير محدد وهو الخط الممرى بالمنحنى المفروض

$$* ٧٤ * \text{ ولنقل بهذه المعادلة } ص = م + ص + ص$$

$$\text{فستخرج منها } \frac{ص}{ص} = \frac{ص + ص + ص}{ص} \text{ واذن يكون}$$

$$\text{اط} = ص - \frac{ص}{ص} = \frac{ص + ص + ص}{ص} - \frac{ص}{ص} = \frac{ص + ص + ص - ص}{ص} = \frac{ص + ص}{ص}$$

$$\text{اب} = ص - \frac{ص}{ص} = \frac{ص + ص + ص}{ص} - \frac{ص}{ص} = \frac{ص + ص + ص - ص}{ص} = \frac{ص + ص}{ص}$$

وبوضع

$$- \frac{ع}{ص} = \frac{ع}{ص} \text{ أو } ع = - \frac{ع}{ص} \dots\dots (٣٨)$$

واذا رسمنا كذلك من نقطة م مستويا موازيا للمستوى (صه و ع) الاحداث فيقطع هذا المستوى السطح المفروض في منحني م د ويقطع المستوى المماس في مستقيم م ك ويكون هذا المستقيم مماسا لمنحني م د وجميع نقطه تكون متساوية البعد عن مستوى (صه و ع) يعني تكون اقصياتها كلها متساوية فيكون  $صه = سه$  أو  $صه - سه = ٠$ .

وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى المعادلة

$$ط (صه - سه) + ع (ع - سه) = ٠ \text{ التي يستخرج منها } ع - سه = - \frac{ط}{صه} (صه - سه) \text{ وهذه المعادلة هي معادلة}$$

المستقيم م ك فيكون شرط تماس هذا المستقيم بالمنحني م د بمساواة

$$\text{مكزركية صه} - سه \text{ للكثير } \frac{ع}{صه} \text{ التفاضل الى المستخرج من}$$

$$\text{معادلة السطح المفروض يعني انه يوجد } - \frac{ط}{صه} = \frac{ع}{صه} \text{ ومن ثم}$$

$$\text{يكون } ط = - ع \frac{ع}{صه} \dots\dots\dots (٣٩)$$

• واذا وضعت مقادير ع و ط المبينة بمعادلتى (٣٨) و (٣٩)

في معادلة (٣٦) ات هذه المعادلة الى

$$- \frac{ع}{صه} (سه - سه) - ع \frac{ع}{صه} (صه - سه) + (ع - سه) = ٠$$

ومن هذه يستخرج

$$ع - ع = \frac{ع}{صه} (سه - سه) + \frac{ع}{صه} (صه - سه) \dots\dots (٤٠)$$

وهذه المعادلة هي معادلة المستوى المماس في نقطة سه و سه و ع

فهذا المستوى يقطع السطح المنحنى المفروض في منحنى م (شكل ٨) ويقطع المستوى المماس في مستقيم مل والمستقيم مل يكون مماساً للمنحنى م والآن نقطع السطح المماس السطح المنحنى ويمكن انتاج معادلة مستقيم مل من معادلة (٣٦) لانه حيث كان هذا المستقيم وهو تقاطع المستوى المماس بالمستوى المار بنقطة التماس موازياً لسطح (س و ع) الاحداثى وكانت نقطة م توجد عليه فيوجد اذ ذلك جميع نقطه صه = صه أو صه - صه = ٠ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى  $ح (س - س) + ع (ع - ع) = ٠$  ولما كانت هذه المعادلة تبين النسب الواقعة بين بعدى س و ع لاي نقطة من مستقيم مل تكون هي معادلة هذا المستقيم ويمكن وضعها هكذا

$$ع - ع = ع - ع (س - س) \dots\dots\dots (٣٧)$$

هذا اذا امعنت النظر ظهر لك ان معادلة السطح المنحنى المفروض التي هي د (س و ع) = ٠ تؤول الى معادلة منحنى م اذا اعتبرت فيها صه ثابتة فاذا أردنا الان معرفة شرط تماس مستقيم مل بمنحنى م نراجع (بند ٧١) ومنه نتحقق انه يجب ان يكون مكرر كمية

• (س - س) من معادلة (٣٧) مساوياً لمقدار  $\frac{ع}{ع}$  المستخرج •

من معادلة المنحنى م ولا يخفى ان معادلة هذا المنحنى هي معادلة السطح معتبراً فيها صه ثابتة ومن ثم يكنى ان يؤخذ تفاضل معادلة السطح المذكور

ويسـتـخـرج منها  $\frac{ع}{ع}$  لانه يعلم من بعد (بند ٥٢) ان الرمز  $\frac{ع}{ع}$

بين أن صه اعبرت ثابتة في اخذ التفاضل وينتج من ذلك انه بتشكيل س و صه هكذا س و صه بعد اجراء العملية يكون شرط تماس مل بالمنحنى م هكذا

$$(0.2) \cdot \frac{1}{1000} = 0.0002$$

\*(٦٠)\*

\* ٧٦ \* ولنجث عن معادلة المستوى المماس بالكرة مثلاً وذلك

نمرنه - مركز الكرة بـ  $هـ$  و  $و$  و  $ر$  فمعاتها تكون

$$(س-هـ)^2 + (س-و)^2 + (س-ر)^2 = نق^2$$

ثم نعتبر  $س$  ثابتة في هذه المعادلة ونأخذ تفاضل فيوجد

$$2(س-هـ)(هـ-و) + 2(س-و)(و-ر) + 2(س-ر)(ر-هـ) = 0$$

$$\frac{هـ-و}{س-هـ} = \frac{و-ر}{س-و} \text{ وكذا نعتبر } س \text{ ثابتة ونأخذ تفاضل معادلة}$$

الكرة المذكورة فيوجد

$$2(س-و)(و-ر) + 2(س-ر)(ر-هـ) + 2(س-هـ)(هـ-و) = 0$$

$$\frac{هـ-و}{س-هـ} = \frac{و-ر}{س-و} \text{ ومعادلة السطح المماس للكرة في نقطة}$$

$س$  و  $و$  و  $ع$  تكون حينئذ

$$ع-هـ = \frac{هـ-و}{س-هـ} (س-و) + \frac{و-ر}{س-و} (س-ر) \text{ (ص-و)}$$

\* ٧٧ \* وإذا كان هذا السطح يمر بنهاية القطر الرأسي يوجد

$$س = هـ \text{ و } س = و \text{ و } س = ع \text{ و } ر + نق = و \text{ و } نق \text{ وتؤول}$$

معادلة السطح في هذه الحالة الى  $ع = ر + نق$  وهذه هي معادلة

المستوى الموازي لسطح  $(س و ص)$  الاحداث

\* ٧٨ \* معادلات الخط العمودي في نقطة  $س$  و  $و$  و  $ع$

يمكن حدودها بالسهولة من معادلة السطح المماس وبيان ذلك ان تقول حيث انه

يعلم من الهندسة التحليلية المسمية بالثلاثة ابعاد أن الشرط الواقع لـ يكون

المستقيم الذي معادلته

$$(٤١) \begin{cases} س + ع = س \\ س + و = ص \end{cases}$$

عمود على المستوى الذي معادلته



\* (٦٢) \*

وهما بان المعادلتان هما معادلتا الخط العمودي في نقطة (س و ص و ع)  
 \* (في الدوال التي تؤول الى : باخذ المقادير التي ياخذها المتغير) \*

\* ٧٩ \* اذا ال كسر ككسر  $\frac{ك}{س}$  الى : باخذ متغير س  
 مقدار ايرمز اليه بحرف  $\gamma$  مثلاً كان ذلك دليلاً على وجود مضروب مشترك  
 هو  $س - \gamma$  أو  $(س - \gamma)^2$  على جهة العموم لكي يلقى الكسر  
 المنفروض واذا اسقط هذا المضروب المشترك ان امكن حدث المقدار الحقيقي  
 للكسر المنفروض

ولنفرض لبيان ذلك ان  $س - \gamma$  يكون مضروباً في  $ك$  س م مرة  
 وفي  $س$  م مرة (ما لم يقتضى الحال الى جعل م و  $\gamma$  مساويين الى  
 الوحدة او الى صفر) فيمكننا ان نضع

$$\frac{ك}{س} = \frac{ع}{س - \gamma} \quad \text{و} \quad \frac{ك}{س} = \frac{ك}{س - \gamma} \quad \text{و} \quad \frac{ك}{س} = \frac{ك}{س - \gamma} \quad \text{و} \quad \frac{ك}{س} = \frac{ك}{س - \gamma}$$

ومنه يحدث  $\frac{ك}{س} = \frac{ع}{س - \gamma} = \frac{ك}{س - \gamma}$   $(٤٣)$   
 وباخذ تفاضل المعادلة الاولى وقسمة جميع حدودها بعد ذلك على  $س$   
 يوجد

$$\frac{ك}{س} = \frac{ع}{س - \gamma} + م(س - \gamma)^{-٢} \quad \text{و} \quad \frac{ك}{س} = \frac{ع}{س - \gamma} + م(س - \gamma)^{-٢}$$

ومن المشاهد ان مقدار  $\frac{ك}{س}$  يتركب من حدين يحتوي احدهما  
 على مضروب  $س - \gamma$  بأصغر من أسه في الدالة المفروضة بواحد  
 واذا اخذنا المكثر التفاضلي لكمية  $\frac{ك}{س}$  شوهد بهذا المنوال انه يحتوي  
 على حد متبوع بكمية  $(س - \gamma)^{-٢}$  وحد آخر متبوع بكمية  $(س - \gamma)^{-١}$

وحدة

وهذا يستدل على ان معادلة (٤٣) تؤول الى صفر حين يكون  $m < 0$   
 واما الحالة الثالثة وهى الأخيرة التى فيها  $m > 0$  فان جميع الحدود  
 تتخفف فيما ساعد احد  $m$  (م-١) (م-٢) ...  $0.000$  ع (م-٣)  
 بأخذ عدد التفاضلات الذى هو  $m$  مساويا الى  $m$  ويبقى حينئذ

$$\frac{0.000}{m} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots 0.000}{m^m} = \frac{0.000}{m^m}$$

وهذا المقدار يدل على ان الطرف الثانى لمعادلة (٤٣) يصير غير منته  
 فى الحالة التى يكون فيها  $m > 0$

\* ٨١ \* وتنتج هذه القاعدة مما سبق وهى متى يراد تعيين المقدار

الحقيقى لكسر  $\frac{0.000}{m}$  الذى يصير  $\frac{0.000}{m}$  باحد المقادير التى ياخذها المتغير

يؤخذ تفاضل كل من كيتى هذا الكسر على حدته ثم ينظر هل يؤول ناتجا

$\frac{0.000}{m}$  و  $\frac{0.000}{m}$  الى صفر بالمقدار الذى يجعل  $\frac{0.000}{m}$  ابلا الى

٠.  $\frac{0.000}{m}$  اولافان الا الى صفر اخذ المخرج التفاضلى لهما الى الكيتى  $\frac{0.000}{m}$

و  $\frac{0.000}{m}$  وينظر ايضا هل يؤول كل من النواتج الحادثة الى صفر

بالفرض المذكور ولا وهكذا اتمام العملية فان وجد بعد بجلة عمليات ناتجان  
 لا يؤول كل منهما الى صفر بالفرض السابق فالكسر المتكون منهما يكون هو  
 المقدار الحقيقى للكسر المفروض واذا آل احدهما وهو البسط الى صفر فالمقدار  
 الحقيقى للكسر المفروض يكون صفرا ويكون مقدار هذا الكسر غير محدود اذا



س = ٠ فيعلم من ذلك ان المقدار الحقيقي للكسر المفروض حين يفرض  
س = ٠ هو ٧ - ١٠ و كمية س = ٠ أو س =  
تكون هي المضروب المشترك لبقية ذلك الكسر ولا يظهر هذا المضروب  
في البسط الذي هو ٧ - ١٠ نظراً له يوجد من بعد (بند ٣٧) ان

$$٧ - ١ = \frac{١}{١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٣}{٣ \times ٢ \times ١} + \dots$$

$$و ١ - ١ = \frac{١}{١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٣}{٣ \times ٢ \times ١} + \dots$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما ما يوجد

$$٧ - ١ - (١ - ١) = (٧ - ١) - (١ - ١) = \frac{(٧ - ١) - (١ - ١)}{٢ \times ١} + \frac{(٣ - ١) - (١ - ١)}{٣ \times ٢ \times ١} + \dots$$

وبهذا يشاهد وجود مضروب س في ٧ - ١

\* ٨٥ \* حيث ان القاعدة التي ذكرناها لا يجاد المقدار الحقيقي للكسر  
الذي يرؤل الى :- باحد المقادير التي يأخذها المتغير مؤسدة على فرضية  
م و ن عددين صحيحين فلا يمكن استعمالها في الحالات التي تكون فيها  
هاتان الكميتان كسوراً اذ لا يمكن الوقوف على حد كذا س = ٧  
يكون مرفوعاً الى أس صفر ومن ثمة لا يمكن تخليص المضروب المشترك من كيمى  
الكسر المفروض واسقاطه منهما  
ولنفرض لعمومية هذه الطريقة أن

$$\frac{٧ - ١}{١} = \frac{١}{١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٣}{٣ \times ٢ \times ١} + \dots$$

وان كميات ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ الخ متزايدة فهذا الكسر يرؤل الى ٧ بوضع س = ٧ ويمكن ان نغير  
كمية س بكمية ٧ + ه عوضاً عن تغييرها بكمية ٧ فقط لكن

ال مقام وحده الى صفر

\*(المثال الاول)\*

\* ٨٢ \* المراد معرفة المقدار الحقيقي لكسر  $\frac{س٣-س٢}{(س-س٢)}$  الذي  
 يؤول الى  $\div$  بفرض  $س = س$  ولذلك نأخذ تفاضل كل من كيتي هذا  
 الكسر فيوجد  $\frac{س٣-س٢}{س}$  وحيث ان كيتي هذا الكسر الاخير لا يؤول الى صفر  
 بفرض  $س = س$  فالمقدار الحقيقي لكسر  $\frac{س٣-س٢}{(س-س٢)}$  حين يفرض  
 $س = س$  يكون  $\frac{س٣}{س}$  وهو المطلوب

\*(المثال الثاني)\*

\* ٨٣ \* لمعرفة المقدار الحقيقي لكسر  $\frac{س٣-س٢+س٢+س٢}{س٣-س٢+س٢+س٢}$   
 حين يفرض  $س = ١$  الذي يجعل هذا الكسر ايلا الى  $\div$  يؤخذ  
 تفاضل البسط والمقام كل منهما على حدته ثم تقسم النواتج على بعضها فيوجد  
 $\frac{س٣-س٢}{س٢+س٢+س٢}$  وحيث ان كلا من كيتي هذا الكسر الاخير يؤول الى  
 صفر بالفرض السابق الذي هو  $س = ١$  فيؤخذ التفاضل ثانيا فيحدث  
 $\frac{س٢}{س٢+س٢+س٢}$

ولما كان مقام هذا الكسر يؤول وحده الى صفر بفرض  $س = ١$  علم  
 من ذلك ان مقدار الكسر المفروض غير محدود

\*(المثال الثالث)\*

\* ٨٤ \* يفرض لكسر  $\frac{س٢-س٢}{س٢}$  الذي يؤول الى  $\div$  بفرض  
 $س = ٠$  فيؤخذ تفاضل كل من البسط والمقام على حدته فيؤول هذا  
 الكسر الى  $\frac{س٢-س٢}{س٢}$

وهو كسر يؤول الى  $\div$  ولا يؤول كيتاه الى صفر فيجعل





بحسب الارادة ويعلم من ذلك انه يمكن اعطاء كمية ه مقداراً بحيث يكون

ذلك الجزء اصغر من كمية  $\frac{واصة}{واسه}$  التي ليست محتوية على ه ولكن ع

رمز المايوول اليه حاصل جمع  $\frac{واصة ه}{واسه ٢} + \frac{واصة ه}{واسه ٢ \times ٢} + الخ$

في هذه الحالة فتؤول متسلسلة (٤٧) الى

$$\left( \frac{واصة}{واسه} + ع \right) ه وحيث انه يوجد$$

$$\frac{واصة}{واسه} < ع فبغرب الطرفين في ه يحدث$$

$$\frac{واصة}{واسه} ه < ع ه او$$

$$\frac{واصة}{واسه} ه < \left( \frac{واصة ه}{واسه ٢} + \frac{واصة ه}{واسه ٢ \times ٢} + الخ \right) ه او$$

$$\frac{واصة}{واسه} ه < \frac{واصة ه}{واسه ٢} + \frac{واصة ه}{واسه ٢ \times ٢} + الخ$$

وهذا ما اردنا اثباته وبمثله يبرهن على اى حد بالنسبة لجميع ما يليه

\* ٩٠ \* لنكن صه = د سه معادلة بمتغيرين فيمكن دائماً

اعتبار هذه المعادلة كمعادلة من رؤسياته هي متساوية لاختلافه لدالة صه

ويقال ندنة صه هذه في نهايتها لصغرى متى مالت الزيادة بعد تناقصها

شيأ فشيأ ومثاله منحنى مـ سـ (شكلى ٩) الذى معادلته صه

= ٢ + دسه فانه بشاهد ان رؤسياته التي هي مـ عـ و مـ عـ ٠٠٠ الخ

تأخذ في النقصان الى نقطة سـ ومن ابتداء هذه النقطة تأخذ الرؤسيات

كـ دـ و كـ دـ ٠٠٠ الخ في الزيادة وعلى هذا يكون الرأسى اسـ هو

النهاية الصغرى للدالة صه

ثم تجرى عليه العمليات اللازمة لمعرفة مقداره الحقيقي حيث انه قد آل الى  $\div$   
 \* ٨٨ \* وبالجمله متى جعل فرض  $س = ٠$  احد مضروبى  
 حاصل ضرب  $م \div$  آيلا الى صفرو جعل المضروب الآخر غير منته وارىد  
 معرفة المقدار الحقيقى لهذا الحاصل يحول الحاصل المذكور الى صورة كسر  
 بالكيفية الآتية وهى ان يفرض أولاً أن حاصل الضرب المفروض يكون  
 $م \times \div$  وان مضروب  $م$  هو الذى يصير صفرا بفرض  $س = ٠$   
 ومضروب  $\div$  يصير غير منته ثم يوضع هذا الحاصل هكذا

$$\frac{م}{\div} = م \times \div$$

ولما كان فرض  $س = ٠$  يجعل مضروب  $\div$  غير منته لزم ان  
 يكون  $\frac{م}{\div} = ٠$  ويؤول حاصل الضرب السابق حينئذ الى  $\div$  فتجربى  
 عليه العملية السابقة

\*(في التمايات الكبرى والصغرى للدوال التى بمتغير واحد)\*

\* ٨٩ \* يمكن اعطاء كمية  $هـ$  فى متسلسلة تيلور مقدارها بحيث يصير  
 اى حد يراد من حدودها اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه وبيان ذلك  
 نكتب المتسلسلة وهى

$$صه + \frac{واصه}{واسه} هـ + \frac{واصه هـ}{واسه^2} + \frac{واصه هـ^2}{واسه^3} + \frac{واصه هـ^3}{واسه^4} + \dots$$

ونقول اذا اردنا ان يكون حد  $\frac{واصه هـ}{واسه}$  مثلاً اكبر من حاصل جمع  
 الحدود التى تليه نضع جزء المتسلسلة المعتمد ابتداء هذا الحد هكذا

$$\left( \frac{واصه هـ}{واسه} + \frac{واصه هـ^2}{واسه^2} + \frac{واصه هـ^3}{واسه^3} + \dots \right) هـ (٤٧)٠٠٠$$

$$لكنه بفرض  $هـ = ٠$  ينعدم جزء المتسلسلة المعتمد ابتداء هذا الحد هكذا$$

فن ثمة يمكن اخذ كمية  $هـ$  صغيرة جداً ابتصارها من صفري ليصير هذا الجزء صغيراً





تكونان اكبر من  $\frac{a}{b}$  وتكون  $\frac{a}{b}$  في هذه الحالة نهاية صغيرة وكذا  
 ان كان  $\frac{a}{b}$  سائلا شوهذا  $\frac{a}{b}$  تكون نهاية كبرى

\* ۹۶ \* وتعتبر هذه القضية نابعة من ان قد يكون  $\frac{a}{b}$  صغرا مع

$$\text{وجود } \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

وفي هذه الحالة لا توجد نهاية كبرى ولا صغيرة الا ان  $\frac{a}{b}$   $\frac{a}{b}$  =

ايضالا ان شارة الحدود التي تلي  $\frac{a}{b}$  من عند ان كانت متعلقة بشارة  
 $\frac{a}{b}$  حين تؤخذ ه صغيرة جدا ويثبت انه اذا كان  $\frac{a}{b}$

موجباً تكون  $\frac{a}{b}$  نهاية صغيرة وان كان سلبياً  $\frac{a}{b}$  تكون نهاية كبرى  
 وهلم جرا

وعلى العموم متى يكون المكرر التفاضلي الاول الذي لم ينفذ بدرجة مزدوجة  
 فانه يوجد نهاية صغيرة اذا كان موجبا ونهاية كبرى اذا كان سلبيا

\*(المثال الاول)\*

\* ۹۷. ۱ \* لمعرفة نهايات هذه الدالة  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$  نضع

اولا  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$  ثم نأخذ التفاضل ونقسم على  $\frac{a}{b}$  فيحدث

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

وبالاجاب مقدار  $\frac{a}{b}$  يستدل على انه يوجد الحد الذي لمقرضه نهاية صغيرة

حـ و صـ هـ وهذه إشارة تناج من ارتباطه بجميع الحدود التي تليه

ذـ زن حلـ حـ مرجبا في احد حلـ ( ٤٨ ) و ( ٤٩ ) فذلك الحلـ

اكرن كبر من صـ و اكرن اصغر من صـ اذا كان اخذ المذكور

وهـ و صـ هـ سلبا و حيث إشارة حـ و صـ هـ متعاكسة

في ضرب خـ يعني موجبة في احدهما وسالبة في الاخر فينتج من ذلك انه

لهذين يكون احدهما كـ ( صـ - هـ ) و ( كـ - سـ ) هـ اكبر

من كـ سـ والاخرى اصغر

وتدفع من هذا انه ذالم يكن - و صـ هـ صفرا فلا توجد نهاية كـ كـ

ولا اصغرى اما ذالم يكن - و صـ هـ = زن حلـ ( ٤٨ ) و ( ٤٩ )

يزولان - ينذالى

و ( سـ + هـ ) = صـ هـ + و صـ هـ + و صـ هـ + ... الخ

و ( سـ - هـ ) = صـ هـ - و صـ هـ - و صـ هـ - ... الخ

واشارة الحدود التي تلى صـ تتعلق في هذه الحالة باشارة و صـ هـ اذا

اخذت كمية هـ مقدار اصغر كافيا لان يكون و صـ هـ اكبر من

حاصل الجمع الجبرى للحدود الاتية بعده وحيث ان اشارة و صـ هـ متعكسة

في الحلين فاذا كانت هذه الاشارة هي الزائد فدالتا - ( سـ + هـ ) و ( سـ - هـ )

تكونان

واذا وضعنا مقداري  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  على التوالي بل اعم

من يوجد  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

وهنا يستدل على انه يوجد اربعة مفروضة نهاية صغيرة ، وثلاثة اقل

من  $\frac{1}{3}$  ونهاية اكبرى موقفة الى اقل من  $\frac{1}{2}$  و

وبوضع هذه التقادير في مقدار  $\frac{1}{2}$  يوجد اربعة من  $\frac{1}{3}$  و

وهو مقدار النهاية الصغيرة ويوجد ثمانية من  $\frac{1}{6}$  وهو مقدار النهاية الكبرى

\*(تطبيق نظرياتنا على حل جملة سبعة)\*

\*(المسئلة لاوز)\*

\* ١٠٠ \* لئلا نقسم عدد مفروضا الى قسمين بشرط ان يكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن

ولاجل ذلك نفرض العدد  $x$  وحدتين نصير بين  $x$  فنقسم

الآخر يكون  $x - 1$  وكية  $x(x-1)$  تكون هي الكمية التي

يراد معرفة نهايتها الكبرى فنضع  $x = 1$  و  $x(x-1)$  ثم نأخذ التفاضل ونقسم على  $x$  فيوجد

في  $x = 1$  و  $x(x-1) = 0$  و  $x = 2$  و  $x(x-1) = 2$

وحيث ان  $x = 2$  سالب فينتق نه يوجد نهاية اكبرى بخلاف ما اذا كان

هذا المقدار موجبا فن المسئلة تكون غير ممكنة ثم نه بمساواة مقدار  $x$  بـ  $x-1$  و

بصفر يحدث منه  $x = 1$  و يعلم من ذلك انه يجب اربعة اعداد المفروضة

تسعين متساو بين ليكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن او نهاية اكبرى

ويعين لافق موثر لهذه النهاية تساوى مقدار  $\frac{واصة}{واصة}$  بصفر فيحدث

منه  $ص = ح$  . ولذا نضع هذا المقدار في مقدار  $ص$  بدلا عن  $ص$   
 $ص = ح$  . وهذا المقدار هو مقدار نهاية الصغرى المطلوبة  
 (المثال الثاني) \*

\* ٩٨ \* لكن  $ح = ح$  .  $ص = ح$  .  $ص = ح$  .  $ص = ح$  .  
 سألنا فضع

$ص = ح$  .  $ص = ح$  .  $ص = ح$  .  $ص = ح$  . ثم نأخذ التفاضل ونقسم على  
 $واصة$  فنجد

$$\frac{واصة}{واصة} = \frac{ح}{ح} = ١ \quad \text{و} \quad \frac{واصة}{واصة} = \frac{ح}{ح} = ١$$

وحيث ان  $\frac{واصة}{واصة}$  سالب فيوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى يستخرج

الاتق الموفق لهما من معادلة  $ح = ح$  .  $ص = ح$  . فيوجد  
 $ص = ح$  . وبوضع هذا المقدار في مقدار  $ص$  بدلا عن  $ص$  يوجد  
 $ص = ح$  . وهذا مقدار نهاية الكبرى المراد إيجادها

\*(المثال الثالث)\*

\* ٩٩ \* لكن ايضا معادلة  $ص = ح$  .  $ص = ح$  .  $ص = ح$  .  
 فنأخذ التفاضل ونقسم على  $واصة$  فنجد كما تقدم

$$\frac{واصة}{واصة} = \frac{ح}{ح} = ١ \quad \text{و} \quad \frac{واصة}{واصة} = \frac{ح}{ح} = ١$$

ثم تساوى مقدار المكثر والتفاضل  $\frac{واصة}{واصة}$  بصفر فيوجد

$$٩ ح = ح - ح = ٠ \quad \text{ومنه يستخرج}$$

$$٩ ح = ح$$

واذا

\* (٧٩) \*

$$\begin{aligned} ٢ دس - ٣ س٢ &= ٠ \text{ ومنها خرج} \\ ٣ س٢ &= ٠ \text{ و } ٣ س٢ = ٢ دس \end{aligned}$$

فقدار س٢ = ٠ لا يفر نهاية كبرى لا  $\frac{٢}{٣}$  يزل به الى

٢ دس وهو عدد موجب فيوافق حينئذ الى نهاية صغيرة وبالخطبة س٢  
يقرب س٢ = ٠ نزول الاسطوانة الى محور شروط (فانه كما ارتفعت  
الاسطوانة قل نخن حجمها) وسقدر س٢ =  $\frac{٢}{٣}$  يكون هو الموافق  
للمسئلة وحده لان مقدار  $\frac{٢}{٣}$  يؤول به الى  $\frac{٢}{٣}$  فيكون عدد

سالبا فاذا طرح  $\frac{٢}{٣}$  = س٢ =  $\frac{٢}{٣}$  و من رتناع ان شروط بقى  
و  $\frac{١}{٣}$  =  $\frac{١}{٣}$  و يعلم من ذلك ان حجم الاسطوانات الممكن رسمها داخل  
محروط قائم ما كان ارتفاعها ثلث ارتفاع ذلك مخروط

\* (المسئلة الثالثة) \*

\* ١٠٢ \* لسان قسم مسـ تقسيم اـ (شكل ١٥) الى قسمين  
اـ و بـ بشرط ان يكون حاصل ضرب اـ بـ نهاية كبرى  
ولذلك نرمز بحرف  $\gamma$  لخط اـ الكل و بحرف سـ لقسم بـ  
فالمعادلة التي ينتهي اليها يؤخذ تفاضلا تكون

صه = س٢ (بـ س٢) ثم يوجد اخذ تفاضل واشبهه على  $\frac{٢}{٣}$

$$\frac{٢}{٣} = ٣ دس - ٢ س٢$$

$$\frac{٢}{٣} = ٦ دس - ١٢ س٢$$

وبمساواة مقدار  $\frac{٢}{٣}$  بصـ  $\frac{٢}{٣}$  خرج س٢ = ٠ او س٢ =  $\frac{٢}{٣}$

(المسئلة الثانية) \*

\* ١٠١ \* نسان نعين اعظام الاسطوانات المممكن رسمها داخل  
مخروط فتم

وهذا مخروط ع و الذي هو ارتفاع المخروط (شكل ١٤) بحرف ح  
ورمى بحرف د خلفه او الذي هو نصف قطر الارتفاع ثم نرسم بحرف سه  
الذي هو بعد رأس المخروط عن مركز الدائرة العليا للاسطوانة  
يحدث من تشابه مثلث ع و د هـ هذه المتناسبة

$$ع : د :: ح : هـ \text{ أو } ع : هـ :: ح : د$$

$$ح : د :: ع : هـ \text{ ومنها يحدث}$$

$$هـ = \frac{د \cdot ع}{ح}$$

ولنرض ان ط تكون نسبة القطر الى محيطه فمساحة دائرة هـ ع ف  
التي نصف قطرها يساوي  $\frac{د}{ح}$  تكون  $\frac{د^2}{ح^2}$  وبضرب هذه المساحة  
في ارتفاع الاسطوانة الذي هو ح - سه يحدث حجم تلك الاسطوانة ويكون  
ذلك الحجم  $\frac{د^2}{ح^2} (ح - سه)$  وهذه الكمية تكون هي التي يراد  
ايجاد نهايتها الاكبرى فتساويها بحرف سه ليحدث

$$سه = \frac{د^2}{ح^2} (ح - سه) \text{ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على } (ح - سه)$$

فيوجد

$$\frac{د^2}{ح^2} = \frac{د^2}{ح^2} (٢ - سه) \text{ و}$$

$$\frac{د^2}{ح^2} = \frac{د^2}{ح^2} (٢ - سه)$$

وبساواة مقدار  $\frac{د^2}{ح^2}$  بصفر يوجد

$$\frac{د^2}{ح^2} (٢ - سه) = ٠ \text{ أو } ٢ - سه = ٠$$



والمقدار  $\frac{1}{\sin \theta}$  في جهول  $\theta$  هو الذي يوافق المسئلة نقطة لان مقدار  $\frac{1}{\sin \theta}$

يؤثر به الى  $\frac{1}{\sin \theta}$  سالب وهو  $-\frac{1}{\sin \theta}$

\* ١٠٣ \* وليتسه انه متى يوجد مضروب ثابت موجب في مقدار

مكرر  $\frac{1}{\sin \theta}$  انه صلي يمكن اسقاط هذا المضروب لانه اذا وجدنا  $\frac{1}{\sin \theta}$

$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$  حيث

كانت هذه المعادلة الاخيرة لا تفيدنا لايان اشارة مقدار  $\frac{1}{\sin \theta}$  وهذه

الاشارة لا تتعلق بالاشارة في  $\frac{1}{\sin \theta}$  لان  $\frac{1}{\sin \theta}$  مضروب ثابت موجب

يتم من ذلك انه يمكن اسقاط مضروب  $\frac{1}{\sin \theta}$  من هذه المعادلة وكذا يمكن اسقاطه

من معادلة  $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$  لانه حيث كان اللازم مساواة الطرفين

نسبى لهذه المعادلة صدر ليس يخرج منها  $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$  فمعادلة  $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$

صحت  $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$  وينتج من ذلك انه يمكن اسقاط الثابتة

\*(مسئلة الرابعة)\*

\* ١٠٤ \* المراد تعيير الاناء الاسطوانى الذى يسع كمية معلومة الحجم

من الماء ويكون سطحه الداخلى اصغرا يمكن ولذلك

مرحله  $\frac{1}{\sin \theta}$  الماء المعلوم بحرف  $\frac{1}{\sin \theta}$  ولنصف قطر قاعدة الاسطوانة بحرف

$\frac{1}{\sin \theta}$  فكمية  $\frac{1}{\sin \theta}$  تكون هي مساحة قاعدة هذه الاسطوانة وحيث انه

يضرر الارتفاع في مساحة القاعدة يحدث حجم الاسطوانة يوجد

ارتفاع الاسطوانة  $\times \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$  ومنه يستخرج

ارتفاع الاسطوانة  $= \frac{1}{\sin \theta}$

ويضرب

\* (٨٣) \*

ثم يجري التفاضل بناء على (بند ١٠٣) فيكون

$$\frac{\text{قصة} - \text{قصة}}{\text{قصة} - \text{قصة}} = \frac{\text{قصة} - \text{قصة}}{\text{قصة} - \text{قصة}} \text{ وبإسقاط مضروب من المشترك}$$

$$\frac{\text{قصة} - \text{قصة}}{\text{قصة} - \text{قصة}} = \frac{\text{قصة} - \text{قصة}}{\text{قصة} - \text{قصة}} \quad (٥٠)$$

ولاجل ان يكون هذا المقدار مساويا الى صفر يوضع

$$\text{قصة} - \text{قصة} = ٠ \text{ فيستخرج منه}$$

$$\text{قصة} = \text{قصة} \text{ وهذا المقدار يوافق نهاية كبرى لانه مجهول}$$

$$\text{قصة} = \text{قصة} \text{ وقبل البحث عن تعيين مقدار قصة}$$

يختصرها الحساب في بعض الحالات وليتأمل أولا انه اذا الت دنة لكمية  
 من الى صفر بمقدار أخذته متغير من فلا يلزم منه ان يكون  
 مكررها التفاضلي صفرا ايضا فان المكرر التفاضلي ٢ من ٥ للدالة  
 ٢ من ٥ + ٦ التي تؤول الى صفر ينرض من ٢ = ٢  
 أو ٢ = ٢ لا يؤول الى صفر بهذه التروينات

\* ١٠٧ \* قد يمكن في بعض الاوقات اختصار عمليات المستعملة لمعرفة  
 هل يوجد للدالة المقررة نهاية كبرى او نهاية صغرى لا تتناذر فرضنا انه يراد

تعيين المكرر التفاضلي لمعادلة  $\frac{\text{قصة} - \text{قصة}}{\text{قصة} - \text{قصة}} = \text{قصة} \times \text{قصة}$  التي فيها  
 من و من دوال متغير من واحدا هما وهي من تؤول الى صفر  
 ببعض المقادير التي ياخذها متغير من وأخذنا تفاضل هذه المعادلة كما في

المعـ لوم مقدار من البارود والمراد معرفة الانساع اللازم لها ون ذى خزنة  
سطوانية يكون فعل قوة البارود على حائط هذه الخزنة اصغر ما يكون وينظر  
ان هذه المسئلة تؤول الى تعيين اصغر السطوح التى تأخذها الخزنة  
وبانظر الى ما سبق يعلم انه ينبغي ان يكون نصف قطر قاعدتها مساويا الى  
ارتفاعها

\*(المسئلة الخامسة)\*

\* ١٠٥ \* نريد أن نرسم مخروطاً داخل كرة بشرط ان يكون سطحه  
المحذب اكبر ما يكون بالنسبة للمخروط الممكن رسمها داخل هذه الكرة  
وسنأخذ فنرض ان نصف دائرة ام - (شكل ١٦) تدور حول محور  
ا - فيحدث وتر ام فى هذه الدورة مخروطاً ارتفاعه ا ح ونصف قطر  
قاعدته م ح ومساحة السطح المحذب لهذا المخروط تكون مساوية الى  
م ح م  $\times$   $\frac{1}{4}$  ام =  $\frac{1}{4}$  ط م  $\times$  ط م = ط م  $\times$  ام  
ف نريد الآن تعيين م ح و ام ولذلك فنرض ان ا - = ٢  
و ا ح = م فيحدث من توسط م ح فى التناسب بين ا ح و م ح  
هذه التناسبة

$$م : م :: م : ٢ - م ومنها يحدث$$

$$م = \sqrt{٢م - م^2}$$

ولذا من توسط ام فى النسبة بين ا ح و ا - يوجد

$$م : ام :: ام : ٢ - م ويحدث من ذلك$$

$$ام = \sqrt{٢م - م^2}$$

وبوضع هذه المقادير عوضاً عن م ح و ام فى الكمية التى تبين السطح  
المحذب للمخروط يوجد

$$السطح المحذب للمخروط = ط \sqrt{٢م - م^2} = ط \sqrt{٤م^2 - ٤م - م^2}$$

وبالمنحرف م لهذه الكمية يكون

$$م = ط \sqrt{٤م^2 - ٤م - م^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$$

• ١٩ • نلاحظ ان المقدار  $\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$  في كثير من استنتاجاتنا

وخاصة مثله في حجة فرضية  $\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  فان بساطتها الى

مضروب به فيوجد

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{2} \times (\sqrt{3}-1)$$

ثم نقول حيث ان مضروب  $(\sqrt{3}-1)$  يساوي صفرا في هذه الحالة

يوجد من بعد (بند ١٠٧)

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{2} \times \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

واذا قسم بسط ومقام هذا الكسر الاخير على  $\sqrt{3}$  يحدث

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}$$

ثم يحدث برصع مقدار  $\sqrt{3}$

الذي هو  $\frac{1}{2}$  عوضا عنه

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}$$

وحيث ان هذا المقدار سالب فيوافق مقدار  $\sqrt{3}$  الى نهاية كبرى

• (المسئلة السادسة) •

(بند ١٤) وسمه عن وسمه يوجد

$$\frac{و^ص}{و^س} + \frac{و^ص}{و^س} = \frac{و^ص}{و^س}$$

وحديث من نزل الى ضرب المتدار الذي تأخذ كمية سم قنوق

تلك المعادلة في وسمه = وسمه وسمه وسمه ويفهم من ذلك انه لايجاد

وسمه يتم ضرب المتدار المتدخلي للضروب الذي يصير صفر

في المضروب الآخر [وهذه القاعدة ليست خالية عن العوارض فان وسمه وسمه

قد يكون صفرًا ايضًا ومثله معادلة وسمه = وسمه (سم - ح) الى

شعوى على جذور متساوية فان حدى مقدار وسمه وسمه فيما يصيران اسفارا

ويجب بحث عن المتكررات التفاضلية التي بدرجة عليا حيثندعوض عن

اسقاط المضروب المتبين برمز سم وسمه كما في (بند ٩٦) ليعرف

هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى او نهاية صغرى واذا صار وسمه وسمه

غير محدود فقد آل الامر الى حالة (بند ٨٧) ]

\* ١٠٨ \* وذا أردنا مثلاً معرفة المتكررات التفاضلية بدرجة ثانية الى

$$\frac{و^ص}{و^س} = \frac{و^ص}{و^س} - \frac{و^ص}{و^س} \text{ بفرض } سم = ح \text{ نضع المعادلة آتلاً هكذا}$$

$$\frac{و^ص}{و^س} = \frac{و^ص}{و^س} \times (سم - ح) \text{ ويوجد من بعد البند المتقدم}$$

$$\frac{واصة}{د+س} \times \frac{س}{س+د} + \frac{س(س+د)}{س} =$$

ثم نترك المقامات بار فنضرب كلتي كسراه في س وبقي المقامات  
الثاني  $\frac{س}{س+د}$  فيحدث

$$\frac{واصة}{س} = \frac{س(س+د)}{س} + \frac{س}{س+د} \times \frac{د+س}{س}$$

ثم نجمع البسوط ونختصر حدودها ونقسم على س فيوجد اخيرا

$$\frac{واصة}{س} = \frac{س}{س+د}$$

وبماواة البسط بصغرىه يخرج س

$$س = \frac{س}{س+د}$$

ولاجل ان ثبت ان هذا المقدار ينفق انى زيادة صغرى يكتفى ان نضع موجب  
(بند ١٠٧) مثل البسط لى هو المقسوم عدم مكرره لانه ضئى فيجد  
على هذه الصورة

$$\frac{واصة}{س} = \frac{س}{س+د} = \frac{س}{س+د}$$

يطلع ولبيجروض مقدار س لان لارج س موجب ايضا

و

\* ١١١ \* من معرفة قدر ذلك السامى بالزيادة ثم نرجعها  
على مستقيم من س و س

وانه ههنا س ههنا نستقيم بدون اس (ش ١١٩) ثم نرسله بحرف د  
ونرسله لحد اضلعين بحرف س فليقع لآخر بصير  $\frac{س}{س+د}$   
وبقدره مساحة المثلث تكون حينئذ  $\frac{س}{س+د}$  فذا ررنا اياه

\* ١١٠ \* نريد ان نثبت من نقطة مفروضة داخل زاوية قائمة خطأ مستقيماً يكون حروء المصور بين ضلعي هذه الزاوية نهاية صغرى ولذلك نفرض ان الزاوية تكون من اصـ (شكل ١٧) والنقطة المفروضة خارجاً تكون ج ثم نفرض ان المستقيم المطلوب يكون وه ونرمز لبعده الى بحرف د واصل ع ج بحرف د وبعده ع ه بحرف د ثم نثبت ان نسبة منى ع ه و ا ه القائى الزاوية هذه

$$ه : ع :: ا ه : او او$$

$$ه : د :: د + ع + ه : او ومنها يحدث$$

$$او = \frac{د}{ه} (د + ع + ه)$$

وبتربيع الطرفين يكون

$$او^2 = \frac{د^2}{ه^2} (د + ع + ه)^2 \text{ وغير ذلك يوجد}$$

$$اه^2 = (د + ع + ه)^2$$

فتوضع هذه المقادير في دستور وه =  $\sqrt{او^2 + اه^2}$  فيحدث من ذلك

$$وه = \sqrt{\frac{د^2}{ه^2} (د + ع + ه)^2 + (د + ع + ه)^2} = (د + ع + ه) \sqrt{\frac{د^2}{ه^2} + 1}$$

وباتحاد المقام في المضروب الاول الذى تحت الجذر يوجد

$$وه = (د + ع + ه) \sqrt{\frac{د^2 + ه^2}{ه^2}} = \frac{د + ع + ه}{ه} \sqrt{د^2 + ه^2}$$

وباعتبار هذه القيمة حاصل ضرب مضروب  $\frac{د + ع + ه}{ه}$  في مضروب

$$\sqrt{د^2 + ه^2} \text{ فنجرى التفاضل على مقتضى (بند ١٤) فيوجد}$$

$$واصه = \frac{د + ع + ه}{ه} \cdot \frac{د}{ه} \sqrt{د^2 + ه^2} + \frac{د + ع + ه}{ه} \cdot \frac{ه}{ه} \sqrt{د^2 + ه^2}$$



المساحة بجرف صه وراجعنا (بند ١٠٣) وجدنا ان المعادلة  
المتتالية اياها وخذنا علمها تكون هي

$$\begin{aligned} \text{صه} - \text{مه} &= \sqrt{\text{ح}^2 - \text{س}^2} \text{ أو هو الاول} \\ \text{صه} &= \sqrt{\text{ح}^2 - \text{س}^2} + \text{مه} \text{ ومنها يستخرج} \\ \frac{\text{و}^2 - \text{صه}^2}{\text{و}^2 - \text{مه}^2} &= \frac{\text{ح}^2 - \text{س}^2}{\text{ح}^2 - \text{س}^2} \end{aligned}$$

وحينئذ نرى هذا المقدار بصفر نجد

$$\begin{aligned} \text{ح}^2 - \text{س}^2 &= ٠ \text{ أو} \\ \text{مه} (\text{ح}^2 - \text{س}^2) &= ٠ \text{ ومنها يحدث} \\ \text{مه} &= ٠ \text{ أو } \text{س}^2 = \text{ح}^2 \end{aligned}$$

وحيث انه لا بد ان يكون مقدار مه صفر فيستخرج ذلك المقدار من  
المعادلة الثانية بمعنى لاخيرة فيوجد مه =  $\sqrt{\text{ح}^2 - \text{س}^2}$  وبهذا المقدار  
يستدل على ان ضاعى اذ و س د يكونان متساويين

هذا وبأخذ تفاضل مضروب ح -  $\text{س}^2$  يوجد كما في (بند ١٠٧) أن  
$$\frac{\text{و}^2 - \text{صه}^2}{\text{و}^2 - \text{مه}^2} = \frac{\text{س}^2 (\text{ح}^2 - \text{س}^2)}{\text{و}^2 - \text{مه}^2} = \frac{\text{س}^2}{\text{و}^2 - \text{مه}^2} \times \frac{\text{و}^2 - \text{مه}^2}{\text{و}^2 - \text{مه}^2}$$
  
وبسبب سلب هذا المقدار يتحقق ان فرضية ح -  $\text{س}^2 = ٠$   
تحدث لمجهول مه مقدار اوافق الى نهاية كبرى

\*(في المدلول الهندسي للكثيرات التفاضلية)\*

\* ١١٢ \* قد علمنا من (بند ٧١) ان  $\frac{\text{و}^2 - \text{صه}^2}{\text{و}^2 - \text{مه}^2}$  يبين ظل الزاوية

التي تقع بين الخط المماس في قاعدة (سه و صه) وبين الخط الافقي وحيث  
كانت هذه القضية اساسا لما يراى البحث عنه فثبتت بها من ازل ودلة بالوجه  
الآتي وهو ان رمز الى ح م (شكل ٤) بجرف صه والى ح ع

بجرف

مترار مع وجوده

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ --- } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

دقتن در این روش مسلسل می باشد (۵۱)

شاهدش می باشد در خروج به روش دیگر

چرا و بنیادش بر این است که اشاره به شکل اول می باشد

در هر دو روش ربع است و در هر دو ربع به روش دیگر

و در هر دو روش در این روش و در هر دو روش

چون در هر دو روش و در هر دو روش

در هر دو روش و در هر دو روش

مع المزد لقی می باشد و در هر دو روش

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ --- } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

و در هر دو روش

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ --- } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(۵۳)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ --- } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

و اگر اعتبار می باشد و در هر دو روش

و اگر اعتبار می باشد و در هر دو روش

و اگر اعتبار می باشد و در هر دو روش

و در هر دو روش

و اگر اعتبار می باشد و در هر دو روش



فصل في معرفة مقدار الزمان الذي يستغرقه الجسم في السقوط من ارتفاع معين  
 فانه اذا سقط من غير سرعة ابتدائية في وقت معين سقط من ارتفاع معين في وقت  
 زائد على ذلك الوقت فيكون مجموع الوقتين هو الوقت الذي يستغرقه الجسم في السقوط  
 من الارتفاع المذكور فيكون  $t = t_1 + t_2$  (دعونا نسمي  $t_1$  وقت السقوط من الارتفاع  
 الاول  $t_2$  وقت السقوط من الارتفاع الثاني  $t$  وقت السقوط من الارتفاع الثالث  
 رافعي ومنه كراي ويرسم المحنى نفسه بأحد راسيات على محور  $OX$   
 وله قيات على محور  $OY$

وبعد ما بين بحث عن النهاية الكبرى والصغرى لـ  $t$  رافعي  
 في  $t = 0$  ولذا يتخرج من المعادلة المذكورة  $t = 0$

ثم يفرض  $t = 0$  ومن ثمة يتخرج  $t = 0$  من معادلة

$t = 0$  وبما أنه متى  $t = 0$  يوجد  $t = 0$

وعلم من ذلك ان الشرط يلزم لوقوع نهاية كبرى وصغرى في جهة الافقيات

هو ان يكون  $t = 0$

\* ١١٦ \* ولذا على المعادلة

س . . .

فان يتخرج منها  $t = 0$  وبما ان هذا المقدار بصفر

يكون  $t = 0$  وبما ان من ذلك انه لا يوجد نهاية كبرى نحو  
 الراسيات الاعلى بعد غير محدود من محور  $OX$

ولاجل أن يعرف هل توجد له نيات نحو الافقيات او لا  
 ( وانها نيات تشمل الكبرى والصغرى ) يفرض مقدار

(٩٦)\*

شاهدان - م ح يرين خطا مستقيما عاكس في الاشارة مع ص

من شأن ان <sup>واصة</sup> يكون سالبا في حالة (شكل ٢١) يعنى متى يكون

تغير المنحنى متبعا لمحور الافقيات

\* ١١٤ \* قد فرضنا ان <sup>واصة</sup> المنحنى ممتد فوق محور الافقيات والآن

نبحث في نتائج حين <sup>واصة</sup> هذا الما في تحت المحور المذ كرر كما في (شكل ٦٧)

فترى ان <sup>واصة</sup> من اذ تق من بعد ماس بق انه حيث كان المنحنى متبعا نحو محور

الافقيات في نقطة م <sup>واصة</sup> فكمية <sup>واصة</sup> او م قد تكون موجبة لكن مستقيما

م و م <sup>واصة</sup> الموجودان في جهة واحدة من مماس ط ط <sup>واصة</sup> يجب

ان يكونا متعدي الاشارة ومن ثمة يكون م <sup>واصة</sup> موجبا كما ان م <sup>واصة</sup>

موجب وينتج من ذلك ان <sup>واصة</sup> في نقطة م المقعر فيها المنحنى فهو محور

الافقيات يكون مختلفا في الاشارة مع الرأسى م ح المتبوع باشارة السلب

وبالعكس فانا يكون المنحنى متبعا نحو محور الافقيات متى كان <sup>واصة</sup>

<sup>واصة</sup> متعدي الاشارة واذن يمكن ان يقال في العموم ان <sup>واصة</sup>

يكون متعديا في الاشارة مع <sup>واصة</sup> متى كان المنحنى موجبا تعدييه نحو

محور الافقيات بوقوعه في اى جهة كانت وبأخذ اشارة عكس اشارة <sup>واصة</sup>

متى كان المنحنى موجبا تعدييه نحو المحور المذ كور

وبعلم ان المنحنى يكون متبعا او مقعرا نحو محور الافقيات بحسب كون الرأسى

آيلا الى نهايته الصغرى او نهايته الكبرى ويتضح السبب في ان <sup>واصة</sup>

موجب في الحالة الاولى وسالب في الثانية

\* ١١٥ \* ويقال ايضا انه يمكن ان توجد نهاية كبرى او نهاية صغرى

متى يكون <sup>واصة</sup>  $\infty$  ولشرح مدلول هذا الشرط نفرض ان

ص

نقطة قريبة او غريبة واذا علمنا موضع هذه النقطة ممكن مع سائر النقط  
المخفية في سيرة

مثاله ان افرض انه يوجد المنحنى (شكلى ١٠) نقطة تحديق حدائى الى حد  
الاجزى فى  $h$  نقطة عكسية فى  $b$  من  $h$  من تشكيل  
المنحنى بالكمية لا تبتعد وهى ان تقول بالابتداء من نقطة  $a$  الى  $b$  فى  $h$   
فى جهة الاقليات يتغير المنحنى اولا نحو محور الاقليات الى نقطة  $h$  من  
توجد فيها نقطة تحديق اخرى يتحول المنحنى فيها من  $h$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
ومن هذه النقطة الى  $f$  يكون قوس  $h$  من  $h$  الى  $b$  من  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
وفى نقطة  $f$  التى هى نقطة عكسية تحول المنحنى الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
بعدها يكون محدبا ايضا فى  $g$  من  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
لنقطة التحديق  $h$  ويمتد هذا الى  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
نحو الراسيات ويتركب المنحنى اخير من قوسين  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
الى  $h$  ومن ابتدا  $a$  الى  $h$  ومن  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
الاقليات ويتلاشى فى نقطة عكسية ويغير المنحنى  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
احداها على التحديق جهة الاقليات و اخرى على التحديق جهة الراسيات  
\* ١٢٠ \* ومن بعد ما نقرر ان علم حزية نهيم بين ابعاد لنقط الغريبة  
بواسطة معادلة المنحنى وحيث ينشأ فنطرق ايضا ايات الكبرى والصغرى  
فلم يبق علينا الا ان نشغل بمبحث ما يلى من النقط وهى نعرضه فقول

\* (فى نقط - ييب) \*

\* ١٢١ \* قد علمنا مسبقا ان نسبة التحديق الى  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
من التحديق الى التحديق او من  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
يحتوى على نقطة من هذا الجنس فى  $h$  من  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
ثم نعتبر فئة الراسيات المصورة بين  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
م  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$   
التي بعد وهى الكائنة عن يسار  $h$  شاهدنا وقوع الامداد  $h$  الى  $a$  الى  $b$  الى  $a$  الى  $b$

وصلة  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  من شرط أن تكون  $\frac{1}{2}$  بمعنى

ربط يزن مقدار  $\frac{1}{2}$  الى  $\frac{1}{2}$  وهو الخ موجب ويعلم من ذلك  
 مقدار  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{2}$  يصل الى نهاية صغيرة لكهنة  $\frac{1}{2}$  وتعين هذه  
 النهاية على  $\frac{1}{2}$  في معادلة المفروضة فتؤول الى  
 $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  ومنها يحدث  $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  وهو مقدار النهاية الصغرى  
 المطلوبة وهي مبنية بخفض  $\frac{1}{2}$  ام في (شكل ٢٣)

\* ١١٧ \* ولينا مثل ان معادلة  $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  تدل على ان تماس  
 م ط (شكل ٢٣) مثل زاوية قائمة ومن ثم يكون عموديا على محور الاقليات  
 \* (كلام كل على النقط العربية والعربية للسنخيات) \*

\* ١١٨ \* في حساب التفاضل فائدة عظيمة لمعرفة صورة او شكل  
 المعنى لمعلوم المعادلة وقد اُثبت لنا فصلا النهايات الكبرى والصغرى طرق  
 تعيين حدود المعنى في جهة الاقليات والراسيات ولكن هذا غير كاف  
 في تعبير صورة المعنى او شكله فاننا نشاهد من عدم تشابه منحنيات الشكل  
 (٦٨) و (٦٩) و (٧٠) التي لها نهايات متحدة وهي و ج و د  
 في جهة اراسيات و او و ب في جهة الاقليات فان معنى  
 (شكل ٦٨) يتغير عن معنى (شكل ٦٩) بكون انه لا يوجد في  
 الاخير الا نقطة تعدي واحدة ونقطة التعدي هي التي يقول المعنى فيما من  
 التعدي الى النقطتين او عكسه واما المعنى الاول وهو الموافق الى (شكل ٦٨)  
 فانه يتولى على تغيير من نقط التعدي احدهما الى ه والآخرى في  
 ويتولى على نقطة قلبية او عكسية في ج والمراد بهذه النقطة كل نقطة  
 تعطل المعنى في ا عن طريق سيره دفعة واحدة

\* ١١٩ \* وعلى العموم كل نقطة وقع للمعنى فيها تغير في سيره تسمى





التفاضلي غير منته ولتأمل بمثال موضع هذه المشكلة فنقول

$$\text{ليكن } \frac{v}{s} = \frac{v'}{s'}$$

فإذا ابتدأت  $s$  بهذه المقادير

$$s = 7 - h \text{ يوجد } \frac{v}{s} = \frac{v'}{s'}$$

$$s = \infty \quad \frac{v}{s} = \frac{v'}{s'}$$

$$s = 7 + h \quad \frac{v}{s} = \frac{v'}{s'}$$

ثم يشاهد ان مقام مقدار  $\frac{v}{s}$  هو الذي تتغير اشارته في لما ذكره لتفاضلي

بعد نقطة التكديب

\* ١٢٤ \* وينتج مما سبق انه لا يمكن وجود نقطة تكديب في سنن يلزم أن يوجد لافق هذه النقطة

$$\frac{v}{s} = 0 \quad \text{او} \quad \frac{v}{s} = \infty$$

ومتى يؤكد وقوع احد هذين الشرطين تزداد وتقص على التوالي من افق

النقطة الموافقة لهذا الشرط كمية صغيرة جدًا هـ فذا صار مقدارا  $\frac{v}{s}$

الحادثين شتت في الإشارة حينئذ من نقطة تكديب لأنه متى يكون  $\frac{v}{s}$

موجباً يكون تكديب منتهى متبهاً فهو ضروري لا ينفك عنه يابون سلبياً

يكون تعبيراً منتهى متبهاً نحو المحور المذکور

(المثال الأول) \*

\* ١٢٥ \* لتطبيق القضايا السابقة على امثلة تنظر هل يوجد للمعنى

المستدل عليه بمعاملة

\* (٩٨) \*

الحالة كإشارة ناتج المسلسلة وحيث كان هذا الحد متحد الإشارة  
في المسلسلة يكون  $\bar{m}^2$  و  $\bar{m}^2$  (شكل ٧١) متحدى الإشارة أيضاً  
ومن جلد ذلك يعلم أنه ليكون  $\bar{m}^2$  و  $\bar{m}^2$  مختلفي الإشارة يلزم أن يوجد

$$\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2} = 0 \text{ أو وهو الأخرى}$$

$$0 = \frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2}$$

\* ١٢٢ \* إذا جعل مقدار  $\bar{m}$  الجاعل  $\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2}$  صفراً مقدار

$\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2}$  ايلا الى صفراً أيضاً يجب لوجود نقطة تحديب أن يكون  $\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2}$

مساوياً الى صفراً كذلك وإذا صار في هذه الحالة  $\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2}$  صفراً يجب

أن يكون أيضاً  $\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2}$  مساوياً الى صفراً لوجود نقطة تحديب وعلى هذا

فقس واذن يجب أن يكون المكرر التفاضلي الأخير الذي يكون صفراً برتبة  
مزدوجة

\* ١٢٣ \* متى يجعل مقدار  $\bar{m}$  المتحد في حلي (٥٨) و (٥٩)

$\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2}$  غير محدود يكون هذان الحلان غير محدودين أيضاً ولا ينتج شيء حينئذ

من الإثبات السابق المؤسس على امكانية هذين الحلين وينبغي أن يعلم في هذه

الحالة أن شرط  $\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2} = 0$  يستدل به في العموم على وجوب

تغيير إشارة  $\frac{\bar{m}^2}{\bar{m}^2}$  في نقطة التحديب وهذا يوافق ما هو مشروح

في بند (١١٣) ويمكن تغيير هذه الإشارة أيضاً حين يصير هذا المكرر  
التفاضلي



\* (١٠٠) \*

صه = د . ا . ٢ (سه - ٢) ٢ ..... (٦٠)  
 نقطة تحديب ولدت اخذ التفاضل فيوجد بعد التسعة على (سه

$$\text{واصة} = ٣ \times ٢ (سه - ٢) \text{ ثم يوجد}$$

$$\text{واصة} = ١٢ (سه - ٢) \text{ و}$$

$$\text{واصة} = ١٢ \text{ و}$$

ولاجل أن يمكن وجود نقطة تحديب المنحنى يجب أن يكون المتغير سه

مقدار يجعل  $\frac{واصة}{واصة}$  ايلالى صفرو حيث كانت سه كمية متغيرة

فيمعنا احد مقاديرها بشرط وجود ١٢ (سه - ٢) = ٠ ويوجد  
 حينئذ سه = ٢ لاجل الاقوى الذى يمكن أن يصلح لنقطة تحديب  
 ولما اكيد وجود هذه النقطة فى المنحنى نقص من اقوى ٢ كمية صغيرة جدا  
 رمزها هـ ثم يوضع ٢ - هـ محل سه فتكون نقطة مـ

(شكل ٧٢) التى اقفاها ٢ - هـ موافقة الى

$$\text{واصة} = ١٢ - هـ$$

ثم يوضع ٢ + هـ محل سه فتوافق نقطة مـ التى اقفاها ٢ + هـ

الى  $\frac{واصة}{واصة} = ١٢ + هـ$  وبسبب اختلاف هذين الحالىن فى

الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديب فى المنحنى المفروض فى مـ وحيث

كل فرض سه = ٢ يجعل  $\frac{واصة}{واصة}$  ايلالى صفرا ايضا فيتحقق

توازى المماس فى نقطة التحديب بالمحور الاقوى

\*( المثال الثانى ) \*

\* (١٠٣) \*

$$\frac{1}{\frac{v}{v_0}} \times \frac{1}{r} \pm = \frac{v}{v_0}$$

وحيث أنه يجعل  $v = 0$  يوجد  $\frac{v}{v_0} = \infty$  فيستبدل

بذلك على أنه يمكن أن توجد نقطة تحديق في النقطة الأصلية وحقق وجودها  
أو عدمه فجعل أولاً  $v = +h$  ونضع هذا المقدار في مقدار

$$\frac{v}{v_0} \text{ فيكون}$$

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{\frac{v}{v_0}} \times \frac{1}{r} \pm h$$

ثم نجعل  $v = -h$  فيصير مقدار  $\frac{v}{v_0}$  تضليلاً وكذا يكون  
مقدار  $v$  وذلك يدل على أن المنحنى لا يمتد جهة الافاق السالبة واذن لا توجد

نقطة تحديق ولو أن  $\frac{v}{v_0}$  في النقطة الأصلية غير محدود وستعرف  
بالاتزان النقطة الأصلية (شكل ٧٤) هي من طبقة النقاط المسماة بالعكسية  
واششرحها فنقول

\* (في النقاط العكسية) \*

\* ١٢٩ \* إذا امتنع المنحنى عن طريق سيره دفعة واحدة وانقلب على  
عقبه كانت له نقطة عكسية فإذا اتخذت إحدى طبيعتيه نحو محور الأفق  
وكانت الطبيعة الأخرى مقعرة نحوه كما يرى في (الشكل ٧٤) يقال لثلاثين  
أو الانعكاس من الجنس الأول ويكون هذا الانعكاس من الجنس الثاني متى  
كان تعبيرها تبين الطبيعتين في جهة واحدة كما في (شكل ٧٥)

\* ١٣٠ \* ويمتنع المنحنى عن طريق سيره هكذا لأن المقادير التي  
ياخذها افق  $v$  في الجهة الأخرى لنقطة  $v$  العكسية يحدث منها  
مقادير تخيلية للرأسي  $v$  ويلزم ذلك أن يكون  $\frac{v}{v_0}$  محتوي على كمية

\* (١٠٦) \*

معنى الأخيرة لا تنطبق الا بوضع  $s = \infty$  وبهذا لا يستدل على شيء  
لاكنه حيث ينسبر لنا ايضا جعل مقدار  $\frac{1}{s^2}$  غير منته فتتقق معادلة

$$\infty = \frac{1}{s^2}$$

بوضع  $s = \infty$  وبهذا المقدار يستدل على انه يمكن أن يكون للمنحنى  
المسروى نقطة تحديب في النقطة الأصلية ولتأكيده وجود هذه النقطة نبذل  
 $s$  بكمية  $\infty + \infty$  و  $\infty - \infty$  اعني  $\infty + \infty$  و  $\infty - \infty$   
على التعاقب وننظر هل يكون  $\frac{1}{s^2}$  في هاتين الحالتين متبوعا بإشارتين  
مختلفتين والاولى أن تفعل هاتان العمليتان معا بابدال  $s$  بمقدار  
 $\infty$  فيؤول المكرر التفاضلي الذي بدرجة ثانية الى

$$\frac{1}{s^2} \times \infty = \frac{1}{s^2}$$

والمقدار العلوى وهو المتبوع بإشارة  $+$  يتسبب الى افق اكبر من افق  
نقطة التحديب والسفلى وهو المتبوع بإشارة  $-$  يتسبب الى افق أصغر من  
افق هذه النقطة وبسبب تخالف هذين المقدارين في الإشارة يتحقق  
وجود نقطة التحديب في المنحنى المستدل عليه بمعادلة  $s = \infty$  في النقطة  
الأصلية انظر (شكل ٧٣)

\* (المثال الرابع وهو الأخير) \*

\* ١٢٨ \* لتكن هذه المعادلة

$$(s - s^2) = s^2$$

$$s = s^2 + s^2$$

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}$$

\* (١٠٥) \*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٦٢)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

ولذلك لا نعلى تعبير المنحنى فهو محور الأفق أو قطبيه قريباً من النقطة التي يمنع  
عن طريق سيره فيما يزداد أفق هذه النقطة كمية صغيرة هـ .

مـ = + هـ أعنى مـ = هـ ويضع هذا المقدار في مقدار هـ فيكون

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ هـ}$$

وحيث ان هذين المقدارين مختلفان الاشارة يستدل بهما على طبيعتين متعاكستين  
أما (شكل ٧٦) فتعقب فهو محور الأفق الأخرى ان تفسر سره وولم  
من ذلك ان النقطة الأصلية نقطة عكسية من النوع الأول

\*( المثال الثاني ) \*

١٣٢ . لتكن هذه المعادلة

$$(ص - د) = (ص - د)^2 \text{ فيستخرج منها}$$

$$ص = د \pm \sqrt{ص - د} \dots\dots\dots (٦٣)$$

واذا جعلنا مـ = د يوجد صـ = د لكن اذا اخذنا متغير مـ

مقادير اصغر من د حدث الى متغير صـ مقادير تخيلية لانه بوضع د - مـ

$$\sqrt{ص - د} = \sqrt{ص - د} \text{ هـ}$$

وهو مقدار تخيلي ويعلم من ذلك ان المنحنى يمنع عن طريق سيره في نقطة د

(شكل ٧٤) التي ابعادها د ود لمعرفة كيفية امتداد طيات هذا

المنحنى بعد النقطة د نبدل مـ بمقدار د + هـ في مقدار

فيصـ فيحدث لنا

٥٧ .

جذرية  $\frac{ص}{س}$  متغير  $س$  واذا احدث  $\frac{ص}{س}$  قبل أن يتغير

منه عن طريق سيره مقدارين احدهما له اشارة  $ص$  والاخر عكسه  $س$  من بينهما على وجود طينتين للحنفي شتعتين في نقطة  $ح$  (شكل ٧٤) شتية احدهما نحو محور الاتزان والاخرى مقعرة وبهذه العلامات يمكن المستعمل على نقطة عكسية من الجنس الاول للحنفي واذا كان العكس

ان كان مقدار  $\frac{ص}{س}$  متعدي الاشارة فالطينان انجتمعتان في نقطة  $ح$

(شكل ٧٥) لا يمكن أن يكونا الامتددين في جهة التقعير او التدبيب وعلما من ذلك ان انعكاس في هذه الحالة يكون من الجنس الثاني

(مثل الاول) \*

\* ١٣١ \* تفكر هل يوجد للحنفي الذي معادلته

$$ص = س = ٩$$

نقط عكسية ولذلك نستخرج من هذه المعادلة

$$ص = س = \pm س \quad س = ٠ \dots \dots \dots (٦١)$$

فتشاهد أنه كلما اخذتغير  $س$  مقدارا سلبا حدث لتغير  $ص$  مقداراً

تجيبيا واذا نمتنع المنحنى عن طريق سيره في النقطة الاصلية التي ابعادها

$س = ٠$  و  $ص = ٠$  ولكن هذا غير كاف لنا كيد ايجاد نقطة

عكسية في النقطة الاصلية لانه يحتمل أن لا يوجد في هذه النقطة الاقوسا

من ضمن بقية تعبيره على الدوام في جهة واحدة كما يكون في رأس القطع الزايد

ولذا ينبغي لمعرفة كون  $س = ٠$  يصلح لنقطة عكسية أن يعرف

ما يؤول اليه المراكز التفاضلي الذي بدرجة ثانية قرب النقطة الاصلية فيؤخذ

تفاضل معادلة  $ص = س = \pm س^٩$  ثم يقسم الناتج على  $ص$  فيوجد

\* (١٠٧) \*

يفصلونان موجبان وينتج من ذلك انه يوجدى النقطة الاصلية طياتان  
مقعرتان معا نحو محور الاختاف وذن تكون هذه النقطة نقطة عكسية  
من الجنس شان

\* ١٣٤ \* النقطة العكسية ليست الاطبقة من النقط المسميات  
نقطا مكررة وهى الآتى شرحها

\* (فى النقط المكررة) \*

\* ١٣٥ \* النقطة التى تجتمع فيها جاذبيات من نحن نسمى نقطة  
مكررة فان كانت الطيات اثنتين سميت هذه النقطة نقطة مضعفة وان كانت  
ثلاثة سميت نقطة مثلثة وهلم جرا نظرا لعدد الطيات : نفعه فيها

\* ١٣٦ \* لتكن ا (شكل ٧٧) نقطة مضعفة حادثة من ذبقي  
ا ح و ا ب المماس بهما ا ط و ا ط فاذا رمزنا بالمعادلة منحنى  
هاتين الطيتين بهذا الرمز ك (س و ص) = ٠ وكانت هذه المعادلة  
عارية عن الكميات الجذرية كان تفاضليا وهو الكائن هذه الصورة  
ح و س + ك و ص = ٠ غير محتوية على جذر صلا لان لم يدخل فى  
هذه الدالة تفاضل كمية جذرية وينتج من ذلك ان كميات ح و ص تكون  
كميات غير جذرية هذا ويوجد من المعادلة السابقة

$$\frac{و}{ص} = \frac{ح}{ص} - \dots\dots\dots (٦٤)$$

ويجب أن يكون لادكار  $\frac{و}{ص}$  التفاضلى مقدرا مختلفان حيث انه

يوجد خطان مماسان ودارم أن يتعين  $\frac{و}{ص}$  بواسطة هذا الشرط وذلك  
يكون متى اشـ قل  $\frac{ح}{ص}$  على جذر لكن ذلك غير ممكن لان  $\frac{ح}{ص}$  غير جذرى  
ففى هذه الحالة يلزم أن يكون  $\frac{و}{ص}$  ايلا الى هذه الصورة : لى هذه

الصورة غير معينة فنتحقق ببساطة مقادير كما يعلم من الجبر  
\* ١٣٧ \* وهما هي كيفية اثبات هذه القضية

\* (١٠٦) \*

$$\frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و يستدل بالاشارة العليا على طيبة حرم المحذبة نحو محور الاضافي  
والاشارة السفلى على طيبة حرم المقعرة نحو المحور المذكور واذن توجد  
نقطة عكسية من الجنس الاقل في ح

\* (المثال الثالث) \*

\* ١٣٣ \* ولذا أخذ المخفى المستدل عليه بمعادلة

$$صه = ح + س + د + \sqrt{س} - س$$

حيث انه يجعل س = ٠ يوجد صه = ٠ ويجعل س =  
سالبا يكون صه تخيليا يدرك ان المخفى يتنوع عن طريق س بيه في النقطة

الاصلية فنبحث عما يؤول اليه  $\frac{1}{\sqrt{س}}$  ولذلك نضع المعادلة السابقة

بهذه الصورة

$$صه = ح + س + د + \sqrt{س} - س$$

$$\frac{1}{\sqrt{س}} = \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{س}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{س}} = \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{س}}$$

ثم نعطى الى متغير س مقدارا موجبا صغيرا جدا وليكن ه فجزء

$\frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  ه من مقدار  $\frac{1}{\sqrt{س}}$  يكون اصغر من جزء ه ويعلم

من ذلك ان مقدارى  $\frac{1}{\sqrt{س}}$  المستدل عليهما بمعادلة

$$\frac{1}{\sqrt{س}} = \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{س}}$$

يكونان

هذه القضية أساس على ما ارتكس به حيث أشرحه

( حينئذ لم على ما سألت انقضائية فقامت

\* من أولاد ما ثبتت ( ١٣٠ ) مؤسس على خلاف

من بنود ما ذكر . الحاشية على ما سألت من غير

بنود يمكن أن لا تحدث مع ما ذكر حتى يستدل بها على ما

... كالمبرهن من معادلة ( ١٣١ ) فان

في معادلة الاعدية في أول معادلة ( ٦٢ ) الى :

... ولكن قول في <sup>خاصة</sup> <sub>واسعة</sub> = ١

\* وبأجله فلننضم الى ما ذكرنا معادلة <sup>خاصة</sup> <sub>واسعة</sub> = :

دود النقطة المثلثة . وقد ثابتت من معادلات ما

لي انه يلزم من وجود هذه المعادلة وجود النقطة واما

تبيين فقط احتمال وجود نقطة مكررة في المنحنى المقروض

\* وما ذكره في ابيان طريقة معرفة هل يمكن أن توجد

عليه معادلة منروضة فقط مكررة اولاً وانما ينص ان

ان يكون ع = ٠ ثم يؤخذ تفاصليها فيوجد

خاصة = ٠

متساوية سواء معادلتى ع = ٠ و ع = ٠

بصفة اولاً فان كان ذلك هذا دليلاً على احتمال وجود

ة في المنحنى يستدل على بعدتها بمقدارى <sup>واسعة</sup> <sub>خاصة</sub>

عن كيفية المنحنى حول هذه النقطة فهذا البحث يتحقق

له مكررة

١٠٨) \*

نفسه في اية من مداري على الر ويتبين ان التبعين بين عماسي  
 هاتين اثبت ان يكون له وقت من الزمان تحقق هذه المقادير معادلة

$$0 = \frac{u}{v} - \frac{u}{v}$$

بوضع اى منها داخل  $\frac{u}{v}$  ويوجد حينئذ

$$0 = \frac{u}{v} - \frac{u}{v}$$

$$0 = \frac{u}{v} - \frac{u}{v}$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$0 = ( \frac{u}{v} - \frac{u}{v} )$$

ولما كان منسوب  $\frac{u}{v} - \frac{u}{v}$  يتركب من كيتين غير متساويتين

وهما  $\frac{u}{v}$  و  $\frac{u}{v}$  فلا يكون ضرورية في المعادلة الاخيرة يجب أن يكون

$0 = \frac{u}{v}$  وبهذا توفى معادلة  $0 = \frac{u}{v} - \frac{u}{v}$  الى

$0 = \frac{u}{v}$  زوول معادلة  $0 = \frac{u}{v}$  أو وهو الاولى

$$\frac{u}{v} = \frac{u}{v} - \frac{u}{v} \text{ الى } \frac{u}{v} = \frac{u}{v}$$

\* ١٣٨ \* اذا كان مثل اطيبتين اثبتعتين في نقطة واحدة جملة

طيات يكنى أن تعتبر اثنتان منها فقط ولاجل أن تتقاطع جميع الطيات في ملق \*

هاتين الطيبتين يجب أن يكون  $0 = \frac{u}{v}$

وليتأمل انه متى وجدت جملة طيات من منحن لها عماس مشترك كانت هذه

الطريقة عاجزة عن التوصيل الى نواتج كالسابقة لكن يجب أن يكون في هذه

الحالة ايضا المكرر  $\frac{u}{v}$  التفاضلي يمكن الايلولة الى هذه الصورة ÷

وحيث

\* (١١١) \*

بإزالة إلى صفر فإذا وقع هذا الشرط كان وجود النقطة المزدوجة في المنحنى محتملاً ولكن هذه المعادلة  $\pm = (س + -) \sqrt{س}$  مثلاً فيؤخذ تفاضلاً فيوجد

$$\left( \sqrt{س} + \sqrt{\frac{س}{٢}} \right) \pm = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$$

وحيث أن هذا المقدار يؤول إلى كمية تخيلية متى يجعل  $س = -$  ويؤول مقدار  $س$  إلى  $س = ٠$  يعلم من ذلك أن نقطة ١ التي أبعادها  $س = -$  و  $س = ٠$  (شكل ٧٨) يحتمل أن تكون نقطة مزدوجة وتعرف كون هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق بإضافة كمية أصغر من  $-$  على بعد  $-$  وكذا بطرح هذه الكمية من  $-$  على الولا فإذا فعلنا هكذا وجدنا في هاتين الحالتين مقدارين تخيليين لمتغير  $س$  وهذا نستدل على أن هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق

\* ١٤٣ \* النقط المزدوجة كالنقط المكررة يحتمل وجودها في المنحنى

متى آل مكرر  $\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$  التفاضلي إلى : لأنه إذا أخذ تفاضلاً معادلة

$$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}} + ع = ٠ \text{ وقسم الناتج على } \sqrt{س} \text{ يوجد}$$

$$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}} + \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}} + \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}} = ٠$$

ويرى أن مكرر الحد المتبوع بكمية  $\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$  هو  $٣$  فإذا أخذ

التفاضل مرة أخرى شوهد أن  $٣$  تكون مكرر للحد ذاته سوى على

$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$  أيضاً وهكذا يعني أنه متى وصل إلى المكرر التفاضلي الذي درجته  $٣$  يوجد ناتج بهذه الصورة



فإذا تطابقت أو تقيدت جميع الحدود المتأثرة بهذين الحدين من الخيارات  
المفروضة منطبقين على بعضهما أو لما إذا كان  $كوسه = د س$  فقط  
فلا تكون هذين المختارين إلا نقطة واحدة مشتركة وهي  $م$  كما عرفت  
وإذا وجد  $كوسه = د س$  و  $كوسه = د س$  معاً فإن  
المختارين يتقاربان من بعضهما زيادة ويعظم تقاربهما ويشتد متى  
 $\frac{كوسه}{كوسه} = \frac{كوسه}{كوسه}$  زيادة على المعادلات المتقدمة وهلم جرا لأن الفرق  
بين كيتي  $م ح$  و  $م ح$  يقل كلما كثرت الحدود المتساوية في الحلول المطابقة لهما  
ولكن بناء على ذلك  $ح و د و ر . . .$  الخ ثوابت معادلة  $صه = كوسه$   
فيمكن أن تأخذ هذه الثوابت مقاديراً ما من غير أن يتغير جنس المختارين لأن  
معادلة  $صه = م س + د س$  مثلاً التي يستبدل بها على قطع  
ناقص لا تفتني الدلالة بها على القطوع الناقصة حين تأخذ ثابته  $م و د$   
أي مقدارين لأن صورة المعادلة لا تختلف (بناء على عدم تغيير اشارتي  $م و د$   
وعدم اخذهما مقادير صفر)

ويمكن من بعد ذلك نظراً لثوابت  $ح و د و ر . . .$  الخ الداخلة في معادلات  
 $صه = كوسه و كوسه = \frac{كوسه}{كوسه} = \frac{كوسه}{كوسه} = \frac{كوسه}{كوسه}$  الخ  
كنوابت حيث ما اتفقت أعني اختيارية وبأخذ عدة من هذه المعادلات كعدة  
ما يوجد فيها من الثوابت تتعين تلك الثوابت بالشروط التي تكون به هذه  
المعادلات متحققة مثلاً إذا لم تحتمو معادلة  $صه = كوسه$  الأعلى لثوابت  $ح و د و ر$   
الثلاث يوضع

$$كوسه = د س و كوسه = \frac{كوسه}{كوسه} = \frac{كوسه}{كوسه} = \frac{كوسه}{كوسه}$$

فيستخرج من هذه المعادلات مقادير  $ح و د و ر$  بدلالة  $صه و كوسه$  الخ



صه و صه (شكل ٥) وستعرف علتها تماس هذا المستقيم  
 \* ١٤٦ \* ولنعود للقضية السابقة ولعدم التطويل في العبارة ندع  
 المنحنيات بمعادلاتها فنقول قد رأينا في بند (١٤٤) انه متى تكون  
 المنحنيين صه = دسه و صه = كسه نقطة واحدة مشتركة مرموز  
 لابعادها برموز صه و صه تكون معادلة هذا الشرط كسه = كسه  
 وبتعيين ثابتين لمعادلة صه = كسه بواسطة شروط كسه = دسه  
 و  $\frac{كسه}{كسه} = \frac{كسه}{كسه}$  يتبدى هذان المنحنيان في التقارب

ولرمز برمز صه = دسه لما توول اليه صه = كسه بعد  
 ما يوضع فيها مقادير هاتين الثابتتين فنحنى صه = دسه يقال له الالتصاق  
 برتبة اولى لمنحنى صه = دسه وكذا اذا حذف بموجب المقادير  
 الحيت ما اتفقت الممكن اعطاها للشوابث ثلاث نوابت من معادلة صه = دسه  
 بواسطة المعادلات الثلاث الآتية اعنى

$$كسه = دسه و \frac{كسه}{كسه} = \frac{كسه}{كسه} و \frac{كسه}{كسه} = \frac{كسه}{كسه} \quad (٧١)$$

ورمز برمز لسه لما توول اليه كسه بعد وضع مقادير هذه الشوابث  
 فيها كان منحنى صه = لسه الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى صه = دسه  
 وهو اشتق باله من الالتصاق الذى برتبة اولى وعلى هذا فقس واذن يوجد  
 لاجل الالتصاق النوى الرتبة معادلات

$$كسه = دسه و \frac{كسه}{كسه} = \frac{كسه}{كسه} = \frac{كسه}{كسه} = \frac{كسه}{كسه} و \frac{كسه}{كسه} = \frac{كسه}{كسه}$$

\* ١٤٧ \* ولنثبت ان احد الالتصاقين الموجودين بهذه الكيفية  
 اعنى بتغيير ثوابت معادلة واحدة وهو الذى برتبة اقل لا يمكن أن يميز بين  
 الالتصاق الآخرو وبين المنحنى المنسوب له هذان الالتصاقيان ولاجل ذلك

\*(١١٤)\*

وتوضع تلك المقادير في معادلة صه = كسه فتتبع هذه المعادلة بهذه الخاصية وهي انه متى تغيرت ساهتغير سه بكمية سه + ه تكون الثلاث حدود الاول من الطرف الثاني لمعادلة (٦٧) التي توجد بواسطة قانون تبلور مساوية بالتوالي للثلاث حدود الاول من الطرف الثاني لمعادلة (٦٦) وما ذكر بخصوص المعادلة التي لا تحتوي الاعلى ثلاث ثوابت يمكن تطبيقه على المعادلة التي تحتوي على اكثر من ذلك من الثوابت

\* ١٤٥ \* ولناخذ الحالة التي تدل فيها معادلة صه = كسه على خط مستقيم مثالا فتكون تلك المعادلة حينئذ مستعوضة بهذه

$$صه = كسه + ه ..... (٦٨)$$

ومعادلات الشرط اللازمة لحذف ثوابت ه و س تكون

$$دسه = دسه' + س و \frac{واسه}{واسه} = ه ..... (٦٩)$$

وحيث كانت دسه تبين الرأسى في نقطة م للمخفى الذي معادلته صه = دسه وكانت سه توافق صه أمكن تغيير دسه بكمية صه وتؤول معادلات (٦٩) حينئذ الى

$$صه' = دسه' + س و \frac{واسه}{واسه} = ه$$

ويجذف ه يوجد

$$صه' = \frac{واسه'}{واسه} + س$$

ويوضع مقدار س المستخرج من هذه المعادلة ومقدار ه في معادلة (٦٨) التي هي معادلة الخط المستقيم تؤول تلك المعادلة الى

$$صه - صه' = \frac{واسه'}{واسه} (سه - سه') ..... (٧٠)$$

وهذه المعادلة هي معادلة مماس م ط في نقطة ج التي ابعادها  
سه

رابطه های مذکور

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

و

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$$

جدا، لاجل اختصار

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

اگر وضع اعداد حلول النسبة هذا

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

و در هر دو طرف جمع و تفریق کنیم و به دست آوریم

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

و در هر دو طرف ضرب کنیم

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

نقصد مثلا ان م = (شكل ٢٤) يكون منحنى صه = دسه  
وم = ودودي معادلاته صه = لسه يكون التصاقيه برتبة ثانية ونريد  
الآن ان نثبت ان الالتصاق صه = دسه الذي برتبة اولى لا يمكن  
ان يزين منحنى م = و م وذلك نضع م = ه همل م في  
هذه المعادلات فيوجد

$$ع م^2 \text{ أو } د (س + ه) = دسه + \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 دسه}{هس} + \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 دسه}{هس} + \dots \text{ الخ و}$$

$$ع م^2 \text{ أو } ل (س + ه) = لسه + \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 لسه}{هس} + \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 لسه}{هس} + \dots \text{ الخ و}$$

$$د (س + ه) = دسه + \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 دسه}{هس} + \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 دسه}{هس} + \dots \text{ الخ و}$$

وحيث ان منحنى صه = لسه هو الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى  
صه = دسه فيكون

$$لسه = دسه و \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 لسه}{هس} = \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 دسه}{هس} = \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 دسه}{هس}$$

وغير ذلك توجد بسبب كون منحنى صه = دسه هو الالتصاق برتبة  
اولى لمنحنى صه = دسه هاتان المعادلتان ايضا

$$دسه = دسه و \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 دسه}{هس} = \frac{ه}{هس} \frac{ه^2 دسه}{هس}$$

وبمقتضى

المتبين بخط م م' لا يمكن أن يميز بين المتخمين الآخرين  
وكذا لو كانت كمية م سالبة فإنه يكون (س - هـ) أو ح م'  
صغور من ح م ومن ح م' ويكون حينئذ متخمين م م' هو الذي يقرب  
من محور الآفاق زيادة فلا يمكن أن يكون م م' م' م' م' م' وهذا  
ما أردنا اثباته

\* ١٤٨ م يمكن الآن أن نبين السبب الموجب ليكون الخط المستقيم  
(شكل ٥) الذي في بند (١٤٥) وهو الانصاف برتبة أولى محاسبا  
بالمخفى لأنه ينتج من القضية السابقة عدم إمكان مرور مستقيم آخر من  
الخط المستقيم وبين المخفى المفروض وهذه هي خاصية أساس للمخفية  
ويقال ان هذا التماس تماس برتبة أولى مع المخفى وعلى مفهوم يقال  
للاتصافى النوفى الرتبة تماس بالمخفى الذى هو التصافى له تماسا لوفى الرتبة  
و يعلم من ذلك انه متى وجدت بين متخمين هذه المعادلات الثلاث

$$\frac{س}{هـ} = \frac{ك}{م} \text{ و } \frac{س}{هـ} = \frac{ق}{م} = \frac{ق}{م} = \frac{ق}{م} = \frac{ق}{م}$$

كان لهذين المتخمين تماس برتبة ثانية ويكون هذا التماس برتبة  
ثالثة متى توجد زيادة على الثلاث معادلات السابقة هذه المعادلة

$$\frac{ق}{م} = \frac{ق}{م} = \frac{ق}{م} \text{ ونس على هذا}$$

\* ١٤٩ م حيث ان معادلة الدائرة (ق) هي

$$(ص - و) + (س - ر) = ق$$

تحتوى على ثلاث ثوابت فيبدأ أن نعين الدائرة التى يكون لها تماس برتبة ثانية  
مع اى متخمين وليكن م م' (شكل ٢٥) المعلوم المعادلات والذات نعرض ان  
س' و ص' يكونان بعدى نقطة م من محيط هذه الدائرة م' ا ر ص'  
يعلم بواسطة معادلة (ص - و) + (س - ر) = ق' = ق (٧١)

$$ل (س + ه) = ک + ر ه + د ه$$

$$د (س + ه) = ک + \frac{۱}{۲} \frac{وا د س}{واس} ه + ر ه$$

وحيث كان منضما  $ص = د س$  و  $ص = ل س$  التصاقين  
احدهما برتبة اولى والاخر برتبة ثانية يلزم من ذلك أن تخالف كمية ر مقدار

$$\frac{وا د س}{واس} \text{ يعنى انه يكون } ر > \frac{وا د س}{واس} \text{ أو } ر < \frac{وا د س}{واس}$$

$$\text{فإذا كانت } ر \text{ اصغر من } \frac{۱}{۲} \frac{وا د س}{واس} \text{ وكانت } ه \text{ هي زيادة } \frac{۱}{۲} \frac{وا د س}{واس}$$

عن ر وجد

$$ر + ه = \frac{۱}{۲} \frac{وا د س}{واس}$$

وإذا كان الامر بالعكس بان كانت ر اكبر من  $\frac{۱}{۲} \frac{وا د س}{واس}$  كانت

كمية ه سالبة فاذا وضع مقدار  $\frac{۱}{۲} \frac{وا د س}{واس}$  هذا في مقدار  $د (س + ه)$

ولوحظ اشترالده فزوب ه ا ل الثلاث حلول السابقة الى

$$د (س + ه) = ک + (ر + م ه) ه$$

$$ل (س + ه) = ک + (ر + د ه) ه$$

$$د (س + ه) = ک + (ر + ه + ه) ه$$

لكن يميل ه صغيرة جدًا تكون كمية ه غير المشتملة على ه اكبر  
من كميات م ه و د ه التي تقبل نحو الصفر فاذا كانت ه موجبة  
عند ذلك كانت  $د (س + ه)$  دالقي  $د (س + ه)$  و  $ل (س + ه)$   
ويعلم من ذلك انه يكون في هذه الحالة  $د (س + ه)$  أو  $ه م$  (شكل ۲۴)  
اكبر من  $ه م$  ومن  $ه م$  وهذا يبين ان منحنى  $ص = د س$

$$(صه - و) = \frac{واصه - و}{وصه - و} = \frac{واصه - و}{وصه - و}$$

$$(صه - و) = \frac{واصه - و}{وصه - و} = \frac{واصه - و}{وصه - و}$$

وبوضع هذا المندرج معادلة (٧٨) بحيث

$$(صه - و) = \frac{واصه - و}{وصه - و} = \frac{واصه - و}{وصه - و}$$

واذا وضعت مقام البرصه - و وصه - و منه في معادلة (٧٧) حدث

$$\frac{واصه - و}{وصه - و} + \frac{واصه - و}{وصه - و} = \frac{واصه - و}{وصه - و}$$

• وإذا جمعت السوط في يوجد لها مصروب مشترك كرت

$$\frac{واصه - و}{وصه - و} + \frac{واصه - و}{وصه - و} = \frac{واصه - و}{وصه - و}$$

$$\frac{واصه - و}{وصه - و} = \frac{واصه - و}{وصه - و}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}$$

مع صـ و ر - - - - -  
 ويرجع إلى مع ر - - - - -  
 في - - - - -

$$(ص - و) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - \dots - \frac{1}{r_n}$$

$$ص - و = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - \dots - \frac{1}{r_n}$$

أن وضع ص و ر - - - - - من محلات

١) و (٧٥) و (٧٦) في معادلات (٧٤) ليس الاحتمال  
 هذه آيات من معادلات (٧٣) و (٧٤) و (٧٥) و (٧٦)  
 وذلك بـزول أو مسح العلامات من معادلات (٧٣) و (٧٤) و (٧٥)  
 بإزالة كل ذلك، فيكون ص = ص - و = ص - و = ص  
 هذا حسب العلامات كما ذكرنا

$$(ص - و) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - \dots - \frac{1}{r_n}$$

$$(ص - و) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - \dots - \frac{1}{r_n}$$

ص

(١٢٠) \*

ردن مقدار استخراج بمقدار من معادلة (١٢) لأنه ثلث شريكة مات  
الطرفين الموضوعين بين حافظتين وربعين بالخاصة بين قوسين الحاسرتين  
المتين المركب من هذا البعد في قانون (٨٢) ولوحظ أن قوة القوة الكلية  
هي  $\frac{1}{2}$  واسه يثبت

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

\* ١٥٣ \* ولتطبيق قانون (٨٢) على الأمثلة نبحث عن نصف قطر  
الافضل للقطع المكافئ تمام (شك ٢٦) وهو من معادله  
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ولذلك نأخذ تناضل هذه المعادلة فيوجد  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  وهو  
منه يحدث

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \text{ثم يوجد}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

وهذا يؤيد قانون (٨٢) الى

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

وباجراء رفع المضروبين الى القوة  $\frac{1}{2}$  يوجد

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{نق } (٨٣)$$

ولكن مقدار الخط العمودي للقطع المكافئ يساوي  $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$

$$r(132)$$

$$\frac{\frac{r}{r^2} \left( \frac{r^2}{r^2} + 1 \right)}{\frac{r^2}{r^2}} = r$$

\* ١٥٠ \* . . . . . فييف الاشارة متعلق بوضع نق فاذا كان تعبير

المنحنى متجهها نحو محور الاتفاق كان  $\frac{r^2}{r^2}$  سالباعلى ما في بند (١١٣)  
ولاجل ان يكون نق عند ذلك موجبا يؤخذ نق باشارة السلب ويوضع

$$\frac{\frac{r}{r^2} \left( \frac{r^2}{r^2} + 1 \right)}{\frac{r^2}{r^2}} = \text{نق} \dots\dots\dots (٨٢)$$

لان متى يتجه تعبير المنحنى نحو محور الاتفاق يقوم  $\frac{r^2}{r^2}$  مقام الكمية

السلبية الى اذا وضعت في مقدار نق جعلته موجبا

\* ١٥١ \* . . . . . الدائرة انى اعتبرناها يقال لها الدائرة الاتصاقية ويقال  
ان نصف قطرها نصف قطر الانحناء ويعلم من ذلك انه لا يلزم لايجاد نصف قطر  
الانحناء لاي منحني الامعرفة معاملة هذا المنحنى المستخرج منها المعادلات

التفاضلية اللازم وضعها في قانون (٨٢)

واذا لم انه يوجه المنحنى تحديده نحو محور الاتفاق يجعل مقدار نق متبوعا  
باشارة موجبة

\* ١٥٢ \* . . . . . وقد يرسم مقدار نق احيانا بهذه الصورة

$$\frac{\frac{r}{r^2} \left( \frac{r^2}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right)}{\frac{r^2}{r^2}} = \text{نق}$$

وهذا

على المنحنى

\* ١٥٦ \* إذا رسمت من جميع نقطتين  $M$  و  $M'$  المنحنى (شكل ٢٨) نصف قطرًا منحنيًا  $MO$  و  $M'O'$  ... الخ أحدثت نقطتين  $O$  و  $O'$  ... الخ التي هي مركز التماس بينه وبين المماسين  $MO$  و  $M'O'$  ... الخ خطأً منحنيًا جميع نقطته توجد تحت قاعدة واحدة (داخلية في معادلة المنحنى  $MM'$  ... الخ) لأنه متى يعلم هذا المنحنى تقع منه مواضع جميع تلك النقاط وذلك المنحنى يعني المتركب من نقطتين  $O$  و  $O'$  ... الخ يسمى مفرد منحنى  $MM'$  ... الخ ومنحنى  $MM'$  ... الخ يقال أنه الانفرادي اعتبارًا بالنسبة إلى المفرد

\* ١٥٧ \* متى ينقل من نقطة إلى أخرى من المفرد فلا تتغير قيمته واصله فقط ولكن تتغير ايضا كميات  $R$  و  $Z$  ونق معالان كميتي  $R$  و  $Z$  هما على وجه العموم بعدا مركز الدائرة الالتصاقية وحيث ان المفرد متكون من بدلت هذه المراكز يعلم ان كميتي  $R$  و  $Z$  هما بعد هذا المنحنى يعني بعدا أي نقطة منه فيغير من نقطة إلى أخرى من المنحنى وكذا تتغير كميتي  $R$  و  $Z$  التي هي نصف قطر الدائرة الالتصاقية وتبين بعدا أي نقطة من المفرد إلى أخرى من الانفرادي من ثم يكون يأخذ تفاضل معادلة (٧٨) بالنسبة إلى جميع المجهول [ولا يمكن أخذ تفاضل معادلة (ص-و) + (و-ر) - (ر-نق) ومشتقاتها بخلاف ذلك وما يترتب من العمل بتعريف ذلك في الاستنتاج معادلات (٧٥) (٧٦) من معادلة (٧٢) يجب ان يلاحظ انه يجب ان تكون هذه المعادلة تحتوى على  $n$  تبين غير منيعتين  $R$  و  $Z$  في هذه الثوابت بواسطة شرط كون الدوال المنبشئة بالاضاف الى المعادلات (٧٥) و (٧٦) تجعل مساوية للصفر وبدون ذلك لم يكن نستدل على انه يساوي صفر من وقوع معادلة (٧٢) و وقوع معادلات (٧٥) و (٧٦) وبالنسبة على  $Q$  و

$$(ص-ز) = \frac{Q}{Q} + \frac{Q}{Q} - \frac{Q}{Q} + \frac{Q}{Q} - \frac{Q}{Q} + \frac{Q}{Q} = 0$$

فقط في هذه الحالة نصف قطر الدائرة الخارجة يساوي نصف قطر الدائرة الداخلة عن نصف قطر الدائرة الداخلة. من هنا نرى أن مركز الدائرة الخارجة يقع على امتداد نصف قطر الدائرة الداخلة. من هنا نرى أن مركز الدائرة الخارجة يقع على امتداد نصف قطر الدائرة الداخلة. من هنا نرى أن مركز الدائرة الخارجة يقع على امتداد نصف قطر الدائرة الداخلة.

١٠٠ \* حيث أن كمية  $\frac{r}{R}$  تبين ظل الزاوية التي تقع بين المماس في نقطة  $M$  (شكل ٢٧) وبين محور الأفاق في معادلة الخط العمودي المماس في النقطة التي أبعادها  $R$  و  $r$  تكون

$$r = R - \frac{r^2}{R}$$

وهذه المعادلة هي كمعادلة (٧٨) التي فيها  $R$  و  $r$  بينان بعدى مركز الدائرة الالتصاقية فيرى من ذلك أن نصف قطر هذه الدائرة هو خط عمودي على



\* (١٢٦) \*

وبطرح معادلة (٧٩) من هذه المعادلة يبقى

$$0 = \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} - \frac{\text{واو}}{\text{واسه}}$$

ويستخرج من ذلك

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \times \frac{1}{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}}$$

وحيث يعلم من بند (٦٧) ان  $\frac{1}{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واو}}$  يكون

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - \frac{\text{واسه}}{\text{واو}} \times \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

ويكون بموجب بند (٢٤)

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - \frac{\text{واسه}}{\text{واو}}$$

واذا وضعنا مقدار  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  هذا في معادلة (٧٨) حدث

$$\text{صه} - \text{و} = \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} (\text{سه} - \text{ر}) \dots \dots \dots (٨٤)$$

\* ١٥٨ \* قد رأينا في بند (١٥٥) ان معادلة

$$\text{صه} - \text{و} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} (\text{سه} - \text{ر})$$

هي معادلة نصف قطر الانحناء الماسر بالنقطة التي ابعادها سه و صه

فتبديل  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  بكمية  $\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}$  لم تزل هذه المعادلة دالة على نصف

قطر

\*(١٢٩)\*

وبقسمة الاولى سنهاتين المعادلتين على الثانية يوجد

$$\frac{قو}{قو} = \frac{قو + قو}{قو + قو}$$

وحيث انه يوجد في بند (١٦٠) بارمز برمز قو نقوس من المقروء

$$\frac{قو}{قو} = \frac{قو + قو}{قو + قو}$$

فإذا طرقت هذه المعادلة بالسابقة حدث من ذلك

$$\frac{قو}{قو} = \frac{قو + قو}{قو + قو}$$

$$\frac{قو}{قو} + \frac{قو}{قو} = \frac{قو + قو}{قو + قو}$$

$$\frac{قو}{قو} = \frac{قو + قو}{قو + قو}$$

وبسبب كون كل دالة تنفاضلها صفر هي كمية ثابتة يعلم ان حاصل جمع  
قو + قو يبين كمية ثابتة وينبئ على ذلك انه بازدياد نصف قطر الانحناء ينقص  
القوس المرموز له برمز قو بمقدار تلك الزيادة والعكس بالعكس ونشرح هذه  
القضية بهذه الكيفية وهي ان نصف قطر الانحناء يتغير بفروقات مساوية  
للفروقات التي تحدث عند تغير القوس من المقروء

\* ١٦٢ \* ليكن (شكل ٢٩) م و = نق و و = قو  
و م و = نق و و = قو فيجد لاجل نصف قطر الانحناء م و  
نق + قو = ثابتة أو

$$م و + قوس و = ثابتة \dots\dots (٨٦)$$

وكذا توجد لاجل نصف قطر الانحناء م و = قو هذه المعادلة

$$\frac{قو}{قو} + \frac{قو}{قو} = \frac{قو + قو}{قو + قو}$$

$$\frac{قو}{قو} + \frac{قوس و}{قوس و} = \frac{قو + قوس و}{قو + قوس و} \dots\dots (٨٧)$$

وحيث ان الاطراف الثانية لمعادلتى (٨٦) و (٨٧) تبين كمية ثابتة  
واحدة على ما بينه البند المتقدم يوجد من ذلك

$$\frac{قو}{قو} + \frac{قوس و}{قوس و} = \frac{قو + قوس و}{قو + قوس و}$$

$$\frac{قو}{قو} - \frac{قوس و}{قوس و} = \frac{قو - قوس و}{قو - قوس و}$$

\* (١٢١) \*

وبسبب تخرج من ذلك بواسطة ضرب الطرفين في  $\frac{1}{(س-ر)}$

وقد  $\frac{1}{(س-ر)} = \frac{1}{(س-ر)} + \frac{1}{(س-ر)}$  وهو المطلوب

\* ١٦٠ \* وهذه الكيفية يوجد لاجل المفرد الذي ابعاده  $ر$  و  $و$

$$\frac{1}{(س-ر)} = \frac{1}{(س-ر)} + \frac{1}{(س-ر)}$$

\* ١٦١ \* نأخذ الآن تفاضل معادلة (٧٧) بالنسبة لجميع

المحروف فيحدث لنا

$$(ص-و)(و-و) + (و-و)(و-و) = (و-و)(و-و) \quad (٧٨)$$

$$(ص-و)(و-و) + (و-و)(و-و) = ٠$$

فاذا طرحنا هذا الناتج من المعادلة السابقة بقي لنا

$$-(ص-و)(و-و) - (و-و)(و-و) = ٠ \quad (٨٥)$$

واذا وضعنا في معادلة (٨٥) هذه وفي معادلة (٧٧) مقدار  $ص-و$

المستخرج من معادلة (٨٤) حدثت لنا هاتان المعادلتان

$$\frac{1}{(س-ر)} - \frac{1}{(س-ر)} = \frac{1}{(س-ر)}$$

$$\frac{1}{(س-ر)} = \frac{1}{(س-ر)} + \frac{1}{(س-ر)} = \frac{1}{(س-ر)}$$

ولما يوضع  $س-ر$  مضروباً مشتركاً ويؤخذ الجذر التربيعي للمعادلة

الثانية تؤول هاتان المعادلتان الى

$$-(س-ر) = \frac{1}{(س-ر)}$$

$$(س-ر) = \frac{1}{(س-ر)}$$

وبقسمة

\* (١٣١) \*

$$(٨٨) \dots\dots\dots ٠ = ١ - س + \frac{س^٢}{ع} \quad (٨٨)$$

$$(٨٩) \dots\dots\dots ٠ = ١ + \frac{س^٤}{٢ع} + \frac{س^٢}{ع} \quad (٨٩)$$

ثم تطرح معادلة (٨٨) من معادلة (٨٩) بعد ضربها في س فيبقى

$$(٩٠) \dots\dots\dots ٠ = \frac{٣س^٤}{٢ع} + س$$

وغير ذلك يوجد بضرب معادلة (٨٩) في ع واختصارها

$$٦س^٦ - ع^٢ + ٣س^٤ = ٠ \quad \text{ومن هنا يستخرج}$$

$$(٩١) \dots\dots\dots \frac{ع}{٢} + \frac{س^٣}{ع} = ٠$$

وبحذف س من بين معادلتى (٩٠) و (٩١) توجد معادلة المفرد

يمكن قبل أن تعمل هذه العملية ننبه ان معادلتى (٩٠) و (٩١)

يؤولان لاجل النقطة الاصلية التى فيها  $س = ٠$  الى  $٠ = ١$  و  $٠ = \frac{ع}{٢}$

فأخذ ان  $س = ع$  (شكل ٣٢) فتوجد نقطة س من المفرد

ثم يرى بواسطة معادلة (٩١) انه بأخذ متغير س مقادير موجبة

اوسالبة يزداد متغير و كلما ازدادت هذه المقادير وينتج من ذلك ان المفرد

يتركب من طيتين س و س

\* ١٦٦ \* ولاجل حذف س من بين معادلتى (٩٠) و (٩١) نربع

الاولى بعد أن يستخرج منها س فيوجد

$$س^٦ = ع \cdot \frac{ع}{٦}$$

ثم يستخرج من معادلة (٩١)

$$س^٦ = (١ - \frac{ع}{٢}) \cdot \frac{ع}{٢} \quad \text{وبتكعيب الطرفين يكون}$$

$$س^٦ = (١ - \frac{ع}{٢})^٣ \cdot \frac{ع^٣}{٢٧}$$

وبساواة مقدارى س<sup>٦</sup> ببعضهما واتسمة الناتج على ع يوجد

$$\frac{١}{٢٧} (١ - \frac{ع}{٢})^٣ = \frac{ع}{١٦}$$

واذا رمزنا برمز و لكمية و - ع وضربنا طرفى هذه المعادلة فى ٢٧ يـ

$$١ = ٢٧ \cdot \frac{ع}{١٦} = ع \cdot \frac{٢٧}{١٦}$$

\* (١٣٠) \*

وبه لم يسهل ذلك لـ الرق بن اى نصفى قطرين من انصاف الاقطار الانحنائية  
يساراً، القوس المحصور بينهما أبداً

\* ١٦٣ \* وينتج من ذلك انه اذا اثبت خيط على المفرد الذى هو و  
(نـ كـ ١٢٩) وانتهى بمماس به و كان ممبنا فى نقطة م من الافراد  
الذى هو م ثم نرد هذا الخيط بابقائه مشدودا على الدوام رسم طرفه م  
فى مركزه سنرى الافراد م د لانه اذا ألقى فى موضع و م فبحركه يزداد  
بقدر قوس و و ومن ثمة يساوى فى الطول نصف قطر الانحناء الذى يمر  
بنقطة و ومنه يفهم ان طرف م ل هذا الخيط يكون موجودا على المنحنى  
الانترادى

\* ١٦٤ \* وهما هى كيفية ايجاد معادلة المنحنى المفرد  
بـ استخراج اولاً من معادلة المنحنى المراد ايجاد مفروده مقادير صه والمكترات

التفاضلية  $\frac{v}{v'} = \frac{v''}{v'''} \dots$  الخ ثم نوضع هذه المقادير فى معادلات (٧٨) و (٧٩)  
فيحدث من ذلك معادلتان مشتقتان على متغير سه فيحذف هذا المتغير  
من بينهما فننشأ عن ذلك معادلة محتوية على و و فتكون هى معادلة  
المنحنى المفرد المطلوبة

\* ١٦٥ \* ولنعين بهذه الطريقة مفرد القطع المكافى الذى معادلته  
 $\frac{v}{v'} = \frac{v''}{v'''} \dots$  فنأخذ تفاضل هذه المعادلة ليستخرج منه

$$\frac{v}{v'} = \frac{v''}{v'''} \dots$$

$$\frac{v}{v'} = \frac{v''}{v'''} \dots$$

فنوضع فى معادلات (٧٨) و (٧٩) مقادير صه و  $\frac{v}{v'}$  و  $\frac{v''}{v'''}$   
هذه لتحديث المعادلتان المشتقتان على سه

$$\left(\frac{v}{v'}\right)$$







\* (١٣٤) \*

اولى تساوى كمية دس + حه كمية كس + هـ وبذلك يؤول  
فرق معادلتى (٩٢) الى

صه - صه = هـ + هـ + هـ + ..... الخ  
وفرق الراسين هذا يلزم أن يوجد له مقداران كم و كم (شكل ٣٠)  
ولذلك يجب أن يكون لاحد المكررات التفاضلية المتينة بهذه الرموز

و هـ ..... الخ مقداران وليكن  $\frac{قصة}{قاس}$  هو هذا المكرر

التفاضلى لكن حيث انه اذا أخذت التفاضلات المتوالية لمعادلة ع/صه  
+ ك/صه = ٠ لا يزال حدث ك باقيا مضروبا فى التفاضل برتبة  
علما لكمية صه فى كل تفاضل فعزل على ما قرر فى بند (١٤٣) يعلم  
من ذلك ان التفاضل برتبة د للدالة المفروضة يمكن وضعه هكذا

$\frac{قصة}{قاس} + ك = ٠$  ويلزم أن يوجد له المكرر  $\frac{قصة}{قاس}$  التفاضلى

مقداران وينب أن كمية ك تكون صفرا كما فى بند (١٣٧) وبمقدار ك

هذا يؤول مقدار ع الى صفرا ايضا وتؤول معادلة  $\frac{قصة}{قاس} = ٠$

حينئذ الى  $\frac{قصة}{قاس} = ٠$  وهو المراد اثباته

\* (تطبيق قضية تيلور على الدوال المتريدة التى بمتغيرين) \*

\* ١٧١ \* متى يتغير فى دالة ع المشققة على متغيرين صه و صه  
غير المرتبطين متغير صه بكمية صه + هـ ومتغير صه بكمية صه + ك  
يمكن حل هذه الدالة بواسطة قضية تيلور لانه اذا استبدلت اولا كمية صه  
بكمية صه + هـ يوجد





تكون موجبة وإشارة كمية (١٠٠) تتعلق بإشارة  $\gamma$  واذن توجد  
بهاية كبرى أو نهاية صغيرة بحسب كون  $\gamma$  سالبة أو موجبة يعنى

بحسب إشارة  $\frac{w}{v}$  المتخذة مع إشارة  $\frac{w}{v}$  حيث أنه شوهد أن

$\gamma$  و  $\gamma$  يفرضان بإشارة واحدة

(فى تحويل الأحداث المستقيمة الى إحداثيات قطبية)\*

\* ١٧٥ نعبر عن  $\gamma$  (شكل ٧٩) المتعين فيه موضع  
نقطة  $m$  بواسطة الإحداثيات المستقيمة  $ac = sm$  و  $mc =$   $sc$   
وهذه النقطة يمكن تعيينها كذلك اذا علمت زاوية  $mac$  والمعلم  
قطر الاحتراق  $am$  ولما كانت الزوايا تقاس بالافراد عدة متبادلات  
زاوية  $mac$  بقوس  $m$  و المرسوم بنصف قطر آخر وحدته  $sc$  يكون  
استعواض الإحداثيات القطبية التى هى  $m = s$  و  $am = r$   
بالإحداثيات المستقيمة  $ac = sm$  و  $mc = sc$

\* ١٧٦ ونبدأ بمل ان مبدأ الآفاق قد يكون بعض الأوقات غير  
نقطة و لانه يمكن تعيين نقطة  $m$  كذلك اذا عرفت نقطة  $w$  نقطة  
الابتداء و علم قوس  $wm$  ونصف قطر  $am$  الاحتراق وفى هذه الحالة  
يمكن أن نرمز لقوس  $wm$  برمز  $\gamma$  وحينئذ لنفرض  $\gamma$  فى الفسوف  
من المبدأ و تختلف عن الآفاق المحسوبة من مبدأ  $w$  بمقدار  $\gamma$

هى  $w$  و توجد بينهما أى يترتّب الآفاق المتعددة هذه المعادلات

$$\gamma = \gamma' - w$$

وحيث انه يمكن بواسطة هذه المعادلة تغيير المبدأ بما يشاء برمز ان هذا  
المبدأ يكون و لاجل السهولة

\* ١٧٧ ولتكن الآن  $d$  ( $sc$  و  $sc$ ) =  $0$  المعادلة التى يرد  
أن تتغير فيها الإحداثيات المستقيمة  $ac = sm$  و  $mc = sc$   
بالإحداثيات القطبية  $am = r$  و  $\gamma = \gamma'$  فنبحث عن

\* (١٣٨) \*

$$٠ = \frac{ع}{ع} + \frac{ع}{ع}$$

رحيث كانت الزيادة ك حيث ما اتفقت تكون م كذلك ولا تزال المعادلة حينئذ واقعة معها كانت م وذلك يقتضى أن تنقسم هذه المعادلة الى هاتين

$$٠ = \frac{ع}{ع} \text{ و } ٠ = \frac{ع}{ع}$$

\* ١٧٤ \* نبحث الآن عما يميز النهاية الكبرى من الصغرى ولذلك ننبه انه حيث كان الحد المشتق على ه صفرا فالحد المحتوى على ه يكون هو المتمتع باشارة حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود التى تأتى بعد ع ويلزم حينئذ أن الحد المشتق على ه أن كان غير صفر لا يكون متعينا بواسطة مقادير ه و ك موجباتارة وسالبا أخرى والا كانت ع فى احدى الحالتين اصغر من ع وفى الحالة الاخرى اكبر منها وحيث كان الامر كذلك فنشرع فى البحث عن الشرط اللازم وقوعه ليحفظ الحد المشتق على ه اشارة واحدة معها كانت المقادير المعطاة الى كى ه و ك وفى هذا البحث نبين الحد المحتوى على ه من معادلة (٩٨) بهذا الرمز

$$\frac{1}{r} \text{ ه } (م + ٢ - م + ع)$$

وبوضع ٧ مضروباً مشتركاً يؤول هذا الحد الى

$$\frac{1}{r} \text{ ه } (م + ٢ - م + \frac{ع}{r} + \dots) \quad (٩٩)$$

وبإضافة كمية  $\frac{1}{r} - \frac{1}{r}$  التى مقدارها صفر على ما بين الحافظتين يمكن وضع كمية (٩٩) هكذا

$$\frac{1}{r} \text{ ه } (م + \frac{ع}{r} + [\frac{1}{r} - \frac{ع}{r} + \dots]) \quad (١٠٠)$$

ويرى انها تكون باشارة ٧ متى اتحد ع و ٧ فى الاشارة وكان

$\frac{ع}{r} < \frac{1}{r}$  يعنى  $ع < ١$  لان الكمية المضروبة فى  $\frac{1}{r}$  ه حينئذ

تكون



وینبغي حینذ رضع هذه المتساوية في معادلة (د) (سه و صه) = ٠

$$\begin{aligned} \text{ل} - \text{م جتا م} \text{ و } \text{ح م} &= \text{ام ج م ا ح أو} \\ \text{سه} &= \text{ن جتا ع و صه} = \text{ع جا ع} \dots\dots (١٠١) \end{aligned}$$

وینبغي حینذ رضع هذه المتساوية في معادلة (د) (سه و صه) = ٠

لحدث المعادلة المنسوبة الى حدسات قطبيه

\* ١٦١ ب نقطة الاصلية لا حدسات لمستقيمة سه و صه  
لست و مرکز المستقي (شکل ٨٠) وکات ر و و الاحداثيات

مرکز اوسه و صه الاحداثيات لمسوبة من ا حدث

$$\begin{aligned} \text{ا ع} &= \text{ا ک} - \text{ا ر} \text{ و } \text{ع م} = \text{م ک} - \text{ا ر} \\ \text{أو سه} &= \text{سه} - \text{ر و صه} = \text{صه} - \text{ر و} \end{aligned}$$

ویرم وضع هذه المتادير في القوانين السابقة

\* (في تحويل الاحداثيات القطبيه الى اخرى مستقيمة وتعيين الكميات  
التفاضلية لقوس في منحن قطبي) \*

\* ١٧٩ \* المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه بينها

$$\text{د} (ع و ع) = ٠$$

وبشاهد زلاکائی (شکل ٧٩) انه يمكن ابدال ع بمقدارها المسدج

من معادلة

$$\text{ام} = \text{ا ع} + \text{ع م} \text{ أو}$$

$$\text{ع} = \text{سه} + \text{صه} \dots\dots (١٠٢)$$

وبالمطوري ع تقسم معادلتی (١٠١) على بعضهم ما فيوجد

$$\text{سه} = \text{سه} - \text{صه} = \text{ظا ع} \text{ ويستخرج من ذلك}$$

$$\text{ع} = \text{قوس (ظا} = \text{سه)}$$

وبوضع مقدار ع هذا مع مقدار ع في معادلة

$$\text{د} (ع , ع) = ٠ \text{ يوجد}$$

$$\text{د} [\text{قوس (ظا} = \text{سه)} \text{ و } \sqrt{\text{سه} + \text{صه}}] = ٠ \dots\dots (١٠٣)$$







\* (١٤٤) \*

المماس والمربع حيث لا البحث عن مقداري م م و م في حالة الحديد  
فالمقوليس لا تفاضل قوس المخني فيكون على موجب بند (١٨١)

$$\overline{م م} = \overline{ع ع} + \overline{ع ع}$$

وانثاني وهو م م بحث عنه بالكمية الآتية وهو أن يقال حيث أنه يحدث  
س قماي اسر و ام وهذا التناسب

$$اسر : سرر :: ام : م م \text{ أو } م م : م م :: ع : ع$$

$$اسر : سرر :: ع : م م$$

يكون م م = ع × سرر وهذه الكمية تؤول في حالة الحديد  
الى ع و ع فضع مقادير م م و م م هذه في مقدار اط بعين  
أن يغير ام بكمية ع و ع بكمية م م وتختصر فتجد

$$اط = \frac{ع ع}{ع} \text{ وهي كمية تحت المماس}$$

\* ١٨٤ \* ولتعين تحت العمودي نراعي أنه حيث كان عمودي ع م  
(شكل ٨١) عموديا على المماس فرأى ام يكون وسطا متناسبا بين  
تحت المماس وتحت العمودي ومن أجل ذلك يوجد

$$اط : ام :: ام : تحت العمودي \text{ أو } م م : م م :: ع : ع$$

$$\frac{ع ع}{ع} : ع :: ع : تحت العمودي ومنه يستخرج$$

$$\frac{ع ع}{ع} = \text{تحت العمودي}$$

وبالنظر الى الخط العمودي والخط المماس نراعي مثلثي م اع و م اط القائم  
الزاوية فيحدث لنا منهما

$$\overline{م م} = \overline{م ا} + \overline{ا ع} \text{ و } \overline{م م} = \overline{م ا} + \overline{ا ط}$$

ثم نضع في هاتين المعادلتين مقادير م ا و ا ع و ا ط فيوجد

العمودي

$$\frac{و\text{ء} = شؤم - مؤء}{و\text{ء}} \dots\dots (۱۱۱)$$

وبواسطه مقادیر المعادلتی بمعادنتی ( ) و ( ) قول معلوم (۱۰۷)

$$\frac{شؤم - مؤء}{شؤم - مؤء} = \dots\dots\dots (۱۱۲)$$

ولم یبق حیثیته التحویل منه المعادلة الى ذات المتغیری و ع و لثبت  
یعین اقلام تد ر و + م بضائفة مرعات مع دلالت (۱۰۸) علی  
بعضها و باختصار الناتج بمساعدة معادلة حاء جتا = انیو ج

$$و\text{ء} + م = و\text{ء} + ع و\text{ء} \dots\dots\dots (۱۱۳)$$

وبالنظر الى مقام معادلة (۱) نأخذ تفاضل معادلات (۱۰۸) علی التعاقب  
باعتبار واء کمية ثابتة ثم نضرب الناتج الاول فی و و الثاني فی م فنجد

$$\begin{aligned} شؤم &= شؤء حاء - و\text{ء} حاء جتا و\text{ء} - شؤم و\text{ء} \\ مؤء &= مؤء حاء جتا - مؤء حاء و\text{ء} - مؤء جتا و\text{ء} \end{aligned}$$

وحین طرح المعادلة الثانية من الاولى يوجد

$$\left. \begin{aligned} شؤم - مؤء &= و\text{ء} (ش حاء - م جتا) \\ + و\text{ء} و\text{ء} حاء جتا - مؤء حاء جتا - مؤء حاء و\text{ء} - مؤء جتا و\text{ء} \end{aligned} \right\} (۱۱۴)$$

واذا ضربنا ثانية معادلتی (۱۰۸) فی جاء و الاولى فی جتا و وطرحنا هما  
من بعضهما و اختصرنا الناتج بواسطه معادلة حاء جتا = انیو ج

$$ش حاء - م جتا = و\text{ء} و\text{ء}$$

و بعمل مشابه لهذا العمل يوجد

$$ش جتا + م حاء = و\text{ء}$$

واذا وضعت هذه المقادیر فی معادلة (۱۱۴) صارت تلك المعادلة

$$شؤم - مؤء = - و\text{ء} حاء و\text{ء} + و\text{ء} حاء و\text{ء} + و\text{ء} و\text{ء} \dots\dots (۱۱۵)$$

\* (١٤٦) \*

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلات ثم نقسم النواتج الحادثة على بعضها  
فيجد لنا

$$\frac{\text{واصه} + \text{ع حاء} + \text{ع جتاء}}{\text{واسه} - \text{ع حاء} - \text{ع جتاء}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

ونرمز لكميتي هذا الكسر برمزي م و د فيجد

$$(١٠٨) \dots \begin{cases} \text{واسه} + \text{ع حاء} + \text{ع جتاء} = \text{م} \\ \text{واسه} - \text{ع حاء} - \text{ع جتاء} = \text{د} \end{cases}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{م}}{\text{د}} \dots \dots \dots (١٠٩) \text{ أو}$$

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{م}}{\text{د}}$$

وبواسطة هذه المعادلة يوجد بخصوص بسط مقدار نقي

$$\left( \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} + ١ \right) = \frac{\text{م}}{\text{د}}$$

ثم نرفع كل كمية من كميتي هذا الكسر الى قوة  $\frac{٣}{٢}$  والقوة  $\frac{٣}{٢}$  لكمية د  
هي د فيجد

$$(١١٠) \dots \dots \dots \frac{\text{م}}{\text{د}} = \left( \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} + ١ \right)^{\frac{٣}{٢}}$$

ونأخذ تفاضل معادلة (١٠٩) فيوجد

$$\frac{\text{واسه} - \text{م}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

ثم نقسم الطرف الاول لهذه المعادلة على واسه والطرف الثاني على د  
المساكنة الى واسه فيجد

واسه

\* ( ٩ ) \*

دورة ثانية حول مركز  $a$  ولذا أخذ  $س٢ = س١$  كانت النقطة  
المتوزعة وقعت في  $س$  في آخر هذه الدورة ثانية وتكون حينئذ  $س$   
مساوية في  $س٢$  في وبنفسه سرور معرفة

$$س = س٢ = س١ \text{ في } س = س٢ \text{ في } س١$$

\* ( في المبروني لونغوريتي ) \*

\* ١٨٩ \* الخوري لونغوريتي هو من جنس قسبي فيه زاوية  $امد$   
(شكلى ٨١) الحادثة بين نصف قطر  $ام$  لاختراق وبن خط  $مط$  المماس  
بالمنى دبتة  $رس$  يوجد بالمرز يحرف  $ح$  اقل زاوية  $امد$

$$ظا امط = ح$$

وحيث انه يحدث من قيام مثلث  $صما$  في  $ا$  هذا تناسب

$$ا : ظا امط :: ام : اند$$

$$ظا امط = اند$$

إذا غير نصف القطر لاختراق  $م$  برمز  $س$  و  $اط$  بمكة

$$\frac{س٢}{س١} = \frac{س٢}{س١} \text{ الموجودة في بند ( ٨٣ ) لاجل تحت المماس للمنحنى قطبي نجد}$$

$$ظا امط = س٢ = س١ = س٢ = س١$$

$$س٢ = س١ = س٢ = س١ \text{ ( ١١٦ )}$$

وبأخذ تكامل هذه المعادلة على ماسية  $س٢$  يـ

$$س٢ = س١ = س٢ = س١$$

وتكن  $س٢$  أساس الجدة بوغار قيمة  $س٢$  يسير فـ  $س٢$   
كلو غريتم  $س٢$  في جـ  $س٢$  فـ  $س٢$  فـ  $س٢$  فـ  $س٢$   
لو  $س٢$  وتكون  $س٢$  فـ  $س٢$  فـ  $س٢$  فـ  $س٢$

وجزا سنة متسايراني تعينت يعني (١١٢) و (١١٥) تغيير معادلة (١١٢) معادلة

$$\text{نق} = \frac{(قاع' + ع'ق) \frac{3}{2}}{2قاع' - ع'ق + ع'ق} \text{ وهي المطلوبة}$$

\* (في المنحنىات العالية) \*

\* ١٨٧ \* نسمى بهذا الاسم المنحنىات التي تحتوى معادلاتها على كميات عالية او مركزات تفاضلية وعلى العموم جميع المنحنىات التي لا يمكن أن تبين معادلاتها بعدد محدود من الحدود الجبرية يقال لها منحنىات عالية ولنسب لشهر من هذه المنحنىات فنقول

\* (في حلزوني ارشميدس أو كوفون) \*

\* ١٨٨ \* اذا دار نصف قطر ا - (شكل ٣٧) حول مركز ا وكانت نقطة ا تتحرك على هذا المستقيم تحركا مستقيما بحيث تأتي في منتهاه وهو نقطة - عند تمام دورته بعد ان كانت في ابتداء التحرك في مركز ا رسمت تلك النقطة في هذا التحرك خطا منحنيا هو حلزوني ارشميدس وليكن ا - = نق و قوس - = ع و ا م = ع فيوجد من بعد التعريف السابق

$$\text{ام : ا : ع :: قوس - : - : ع} \quad \text{أو} \quad \text{ع : نق :: ع : ٢ ط نق ومنه يستخرج}$$

$$\frac{ع}{٢ ط} = ع$$

وهذا المنحنى ليس له احداثيات مستقيمة على ما يشاهد فاذا دار ا - دورة تامة كافي قوس - في المحيط ويكون حينئذ ع = ٢ ط نق ومن ثمة تتناول المعادلة السابقة الى

$$\frac{٢ ط نق}{٢ ط} = ع \quad \text{أو} \quad ع = نق$$

واذا استمرت نقطة ا في تحركها على الاتساق رسم نصف قطر ا - دورة

\* (١٥١) \*

النقطية المتبين في بند (١٨٦) بهذا الزمن

$$\frac{\frac{3}{2}(\frac{1}{2}ع + \frac{1}{2}ع)}{\frac{3}{2}ع - \frac{1}{2}ع} = \text{نق}$$

مقادير  $\frac{1}{2}ع$  و  $\frac{1}{2}ع$  المستخرجة من معادلة الخزوني الموزونة  
بعضا عنها ولذلك نستخرج من معادلة (١١٦)

$$\frac{1}{2}ع = \frac{1}{2}ع \text{ و } \frac{1}{2}ع = \frac{1}{2}ع = \frac{1}{2}ع$$

ثم نضع هذه المقادير في مقدار نق فيوجد

$$\frac{\frac{3}{2}(\frac{1}{2}ع + \frac{1}{2}ع)}{\frac{3}{2}ع + \frac{1}{2}ع} = \text{نق} = \frac{3}{2}(\frac{1}{2}ع + \frac{1}{2}ع)$$

واذا وضعت في كمية الخط العمودي التي هي على ما في بند (١٨٤)

$$\frac{1}{2}ع + \frac{1}{2}ع$$

مقدار  $\frac{1}{2}ع$  حدث كذلك  $\frac{1}{2}ع + \frac{1}{2}ع$  وبعلم من ذلك ان الخط

العمودي يساوي في هذا المكنى نصف قطر الافئحاله وحيث ان نصف قطر  
الافئحاله يتجه على هذا الخط العمودي على ما في بند (١٥٥) يتج  
من ذلك ان هذه الخطوط تنطبق على بعضها

\* ١٩٢ \* وبواسطة هذه الخاصية ثبت ان مفرد الخزوني  
اللوغاريتمي هو خزوني لوغاريتمي ايضا ولاجل ذلك نعتبر نقطه  
(شكل ٨٤) من الخط العمودي التي هي من نقط نصف قطر الافئحاله ايضا  
اذ هي نهايته الحقيقية وتوجد لاشكاله على المفرد ثم نرمز لابعادها لقطبية  
برموز  $\frac{1}{2}ع$  و  $\frac{1}{2}ع$  فيسهل تعيين هذه الابعاد بدلالة ابعاد  $\frac{1}{2}ع$  و  $\frac{1}{2}ع$   
لنقطه م من المكنى لانه اذا فرضنا ان  $\frac{1}{2}ع$  يكون قوسا من الدائرة

في هذه الجملة اللوغاريتمية (ولاثبات ذلك نقول حيث ان هـ هي أساس  
الجملة اللوغاريتمية المنسوبة للمهندس نبيير يوجد بالنسبة لهذا الأساس  
نوع  $\epsilon$  وبأخذ لوغاريتم الطرفين بحسب الجملة اللوغاريتمية  
المبينة برهن لو يوجد

\* (۱۶۳) \*

و اخذت لبنة ح باشارة ناقص لانه يوجد عند ذلك

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

التي هي مودة يتحدث منها من بعد اخذ تكاملها على ما سبق

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

وتوزل هذه المعادلة بتعبير كمية ش غير متعينة بكمية اخرى ش غير متعينة الى

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

واذا اخذت النقطة لاصلية ولا بد كمية لاذني في جميع اكون  
أفق في ش مساوية في أفق جديد في ان معادلة لسابقة في

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \dots \dots \dots (1)$$

وتبين هذه المعادلة انه يوجد ع = ∞ متى يكون ع = ∞  
وينتج من ذلك ان نصف قطر الاحتراق الموفق في النقطة التي يكون فيها  
ع = ∞ هو خط متقرب في مستقي

\* \* ۱۹۴ \* معادلة (۱۱۷) تبين ان نصف قطر الاحتراق

يناسب لاذني عكسار جعده ع = ∞ و ع = ∞ و ع = ∞ و ع = ∞

فيجد بخصوص ع هذه معادير متوالية في و ع = ∞ و ع = ∞

ويعلم من ذلك ان نصف قطر الاحتراق يؤول الى نصف ما في حراسورة

الاولى عند تمام دورتين ويؤول الى ثلث ما كان عند تمام ثلاث دورات

وهلم جزا انظر لعدة دورات التي يدورها حول النقطة القطبية

\* ۱۹۵ \* معادلة حلزوني زندي هي ومعادلة حارفي ارشيدس

لبست الاحالات خصوصية من معادلة ع = ∞ و ع = ∞ و ع = ∞

\* (١٥٢) \*

مرسومة بنصف قطر مساو للواحد كانت آفاق تقطى م و د تحت  
عن بعضها بنصف قطر مساو بسبب تمام زاوية م ا د يكون ذلك القوس مساويا  
الربع المحيط ولعدم الاختلاف في المستعملات نعين برمز  $\frac{1}{2}$  ربع المحيط المرسوم  
بنصف قطر يساوى الاحد فنجد  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  وبأخذ تفاضل  
هذه المعادلة يوجد

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ونعير ذلك حيث ان بعد ع القطبي للنقطة د من المفرد يساوى

$$\text{تحت العمودى } \frac{1}{2} \text{ للجزئى اللوغارىتمى تغير } \frac{1}{2} \text{ بقيمة } \frac{1}{2}$$

في معادلة هذا المنحنى فنجد  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  وعلى ذلك يكون  
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  فبوضع مقادير  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  هذه في معادلة (١١٦)  
للجزئى اللوغارىتمى نجد

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وهذه المعادلة متحدة الشكل مع المعادلة السابقة فيها يفهم ان مفردا  
الجزئى اللوغارىتمى هو جزئى آخر لوغارىتمى وهذا ما أردنا بيانه \*  
\* (في الجزئى الزائدى والجزئيات الكامنة في معادلة  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ) \*  
\* ١٩٣ \* الخاصية التى تتميز بها الجزئى الزائدى هى ثبوت أو عدم  
تغير قيمته المماس فيه فاذا رمزنا تحت المماس هذا برمز  $\frac{1}{2}$  وساويناها  
بتدريجته لـ  $\frac{1}{2}$  لنجد قطبي وهو المتعين فى بند (١٨٣) كانت معادلة  
هذا المنحنى يعنى الجزئى الزائدى هكذا

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

واخذت

\* (١٥٥) \*

\* ١٩٩ \* الخاصية الشهيرة لهذا المنحنى هي ثبوت اعنى عدم تغير تحت المماس فيه لانه يوجد جسد بأخذ تفاضل معادلة النوغاريقي

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{سه}}{\text{لوعا ح}} \text{ ويستخرج من ذلك}$$

$$\frac{\text{سه واسه}}{\text{واصه}} = \frac{1}{\text{لوعا ح}} \text{ أو}$$

$$\frac{1}{\text{لوعا ح}} = \frac{\text{صه واسه}}{\text{واصه}}$$

وحيث ان الطرف الاول لهذه المعادلة يبين تحت المماس للمنحنى كما في بند (٦٩)

فهو ثابت لمساواته كمية  $\frac{1}{\text{لوعا ح}}$  الثابتة وهو المراد بياته

\* (في السكلويد) \*

\* ٢٠٠ \* السكلويد سنحن يرسم بنقطة م (شكل ٣٩)

الكائنة على محيط الدائرة المتدرجة على مستقيم م ح ومن الملاحظ ان جميع نقط قوس م ح تنطبق على التعاقب على مستقيم م ا فنطبق نقطة م في قوتها على ا في هذا التحرك لا نأخذ من م نحو ح ويكون

قوس م ح مساويا للمستقيم م ا

وحيث كانت جميع النقاط التي تمر عليها م في هذا التدرج توجد على

السكلويد فرضا فنقطة ا تكون كذلك على هذا المنحنى فمأخذها مبدأ

للافاق او نقطة أصلية وتنزل عمود م ه على قطر م ح ونجعل

ا ح = سه و ح م = صه و م ح = ح قوس م ح = ز و م ه = ع فنجعل

$$ا ح = ا ح - ح م أو$$

$$سه = قوس م ح - م ه أو$$

$$سه = ز - ع ..... (١١٨)$$

ونبحث أولا عن حذف قوس ز بالكيفية الاتية وهي أن نأخذ تناسل

\* (١٥٤) \*

يجعل  $\infty = 1$  و  $\frac{1}{\infty} = 0$  تحدث المعادلة الثانية ويجعل  
 $\infty = 1$  تحدث الاولى ومن الحزوينات التي تبين بهذه المعادلة الحزويني  
 المتكافى وهو الموافق الى فرض  $\infty = 2$

\* (في اللوغاريتمى) \*

\* ١٩٦ \* اللوغاريتمى منحن باحداثيات مستقيمة وفيه الافق  
 لوغاريتمى رأسية واذن تكون معادلة هذا المنحنى بهذه الصورة

$$y = \log x \quad \text{و منها يستخرج}$$

$$x = e^y \quad \text{ثم يوجد بواسطة التفاضل}$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x$$

\* ١٩٧ \* للبحث عن بعض خواص هذا المنحنى نجعل  $y = 0$   
 فنجد  $x = 1$  واذا أعطينا بعد ذلك مقاديراً متزايدة وموجبة  
 الى متغير  $y$  أخذ متغير  $x$  في الازدياد واذا أخذ متغير  $y$

مقداراً سالباً  $-x$  يوجد  $y = -\log x = \log \frac{1}{x}$  ويرى  
 ان الرأسى يتناقص كلما بعد عن النقطة الاصلية في جهة الافاق السالبة  
 وان المنحنى لا يقابل محور الافاق الاعلى بعد غير محدود في الحالة التي تصير  
 فيها معادلة  $y = \log \frac{1}{x}$  آيلة الى

$$y = \log \frac{1}{0} = \infty \quad \text{وننتج من ذلك ان امتداد محور الافاق}$$

خط مقربى للمنحنى

\* ١٩٨ \* اذا أخذت من ابتداء النقطة الاصلية الافاق المتساوية  
 (شكل ٣٨)  $x = e^y$  و  $x = e^{-y}$  يوجد  
 $2x = e^y + e^{-y}$  و  $\frac{1}{2x} = e^y - e^{-y}$  واذن يكون  
 $2x \times \frac{1}{2x} = 1$

\* ١٩٩ \*



المعادلة السابقة فوجد

واسه = وار - واع ..... (١١٩)  
ولايجاد مقدار وار بدلالة ع راعى انه يوجد بين ع و ق  
هذا تعادل

$$ع = جاز$$

وبالحذ تفصل هذه المعادلة على ما في بند (٤٢) يوجد

$$وع = وار - جتا ع ومنه يستخرج$$

$$وار = جتا ع$$

وبنرم تغيير مقدار جتا ع في هذه المعادلة بالمقدار الذى يحدث من معادلة

$$جار = جتا ع + جتا ع$$

$$ع = جتا ع + جتا ع$$

ويحدث بذلك

$$وار = \frac{ع}{\sqrt{ع - ع}}$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (١١٩) يكون

$$واسه = \frac{ع}{\sqrt{ع - ع}} - واع ..... (١٢٠)$$

ولم يبق الا بيان ع بدلالة صه ولاجل ذلك ففرض ان و يكون  
مركز الدائرة الراجعة سم (شكل ٣٩) فيجد

$$وه = م - م - م هـ او$$

$$هـ - صه = \frac{ع}{\sqrt{ع - ع}} ..... (١٢١)$$

وبتربيع هذه المعادلة واختصارها يستخرج منها

$$ع = \frac{ع}{\sqrt{ع - ع}} ..... (١٢٢)$$

وبالحذ

\* (١٥٩) \*

$$\text{العمودي} = \text{صه} \sqrt{1 + \frac{\text{واصه}^2}{\text{واسه}^2}}$$

فإذا وضعنا في هذا القانون مقدار  $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}}$  مستخرج من مولدة السكاويد  
نجد

$$\text{العمودي} = \text{صه} \sqrt{1 + \frac{\text{صه}^2 - \text{صه}^2}{\text{صه}^2}} = \text{صه} \sqrt{1} = \text{صه}$$

ولاجل رسم هذا المقدار نوصل وتر م (شكل ٤٣) فنجد

ده : م :: م : د - أ

صه : م :: م : ح ومنها يحدث

$$\text{وتر م} = \sqrt{\text{ح}^2 - \text{صه}^2}$$

وحيث ان زاوية م-د قائمة من خاصية الدائرة فوتر م-د يكون ممواً  
على الخط العمودي م-د في طرفه ويعلم من ذلك ان وتر م-د الممدود يس  
السكاويد في نقطة م لان الخط المماس والخط العمودي يشكلا  
بينهما زاوية قائمة ابداً

واذن يمكن امتداد الخط المماس للسكاويد في نقطة م برسم نصف  
الدائرة الراسمة م-د ومدوتر م-د ولعدم تشاكل هذه الدائرة للرسم  
في كل نقطة من المنحنى يكفي رسم نصف الدائرة ر-سمة على المركز راسية وتره  
م-د (شكل ٤٤) ومدخط م-ده من المثلثة المبروفة م-د عموداً على  
م-د ووصل وتر م-د فخط م-ط المرسوم من نقطة م مرورا بالهند  
الوتر يمكن ان يكون هو المماس المطلوب وذلك لما كان لاقية م-د يسبق  
\* ٢٠٤ \* لمعرفة مقدار نصف قطر الانحناء السكاويد يلزم أن نسته رج

مقادير  $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}}$  و  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  من معادلة هذا المنحنى ثم نضع تلك مقادير  
في كمية نصف قطر الانحناء التي هي

تؤول كية قوس (جا =  $\gamma$  ٢ صه - صر) الى  
 قوس (جا =  $\gamma$  ٢ صه - صر) وهى كية تخيلية وثانيا اذا جعل  
 صه = ٢ + ل آلت كية قوس (جا =  $\gamma$  ٢ صه - صر)  
 الى قوس (جا =  $\gamma$  ٢ ل - ل) وهو مقدار تخيلي ايضا فاذن يكون  
 المتخني محصورا بين متوازيي حر - ا - بم - ا - (شكل ٤٠) موازيا الى  
 حر على بعد هف = ٢ عن محور الآفاق

واكبر مقدار يكون لمتغير صه هو ٢ لانه اذا خرجت الدائرة الراسمة  
 من ا نحو ح (شكل ٤١) أخذت نقطة م التى كانت أولا فى ا  
 فى الارتفاع على الولا الى ان تصير فى - التى هى طرف قطر - د فيكون  
 عند ذلك اتقى ا د مساويا الى د ه - يعنى نصف محيط الدائرة الراسمة  
 وهذا الناتج يطابق ما يحدث من معادلة (١٢٤) حيث انه يجعل  
 صه = ٢ فيباينوجد سه = قوس (جا = ٠) والقوس الذى  
 جيبه صفر هو احد هذه القسى ٠ و د ه - و ٢ د ه - و ٣ د ه - والخ  
 ويرى ان القوس فى هذه الحالة هو د ه -

ويعلم من ذلك انه حين تأتى نقطة م فى - تكون قدر سمت قوس ا -  
 من السكويد فاذا استقرت هذه النقطة فى تحركها سمت قوسا آخر ح -  
 مشابها للاول وبالجملة متى استقرت الدائرة الراسمة فى تدحرجها على محور  
 الآفاق حدثت نقطة م قسما من السكويد لا حصر لعددها وهى  
 ح - د - و ح - د - .... الخ انظر (شكل ٤٢) ويمكن أن تحرك  
 الدائرة الراسمة فى جهة ا نحو ا و تحدث نقطة م حينئذ قوسا  
 غير محصورة العدد ا - ا و ا - ا ..... الخ  
 وجهة الاقواس الموجودة فى الجهة المرادة هى المركبة للسكويد

\* ٢٠٣ \* الخط العمودى فى النقطة التى ابعادها سه و صه  
 (شكل ٤٣) متعين على ما فى بند (٧) بهذا القانون  
 العمودى



\*(١٦٠)\*

$$ق = \frac{\left( \frac{واصة}{ص} \right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{واصة}{ص}} - \text{على مافي بند (١٥٠)}$$

لما خوذت بشاره سائبة لا ناعلم ان هذا المختنى يقع نحو محور ال'طاق  
هذا ويحدث قلاص معارلة السكاويد

$$\frac{واصة}{ص} = \frac{واصة}{ص} - \frac{واصة}{ص} \dots \dots \dots (١٢٥)$$

$$\text{ولايجاد } \frac{واصة}{ص} \text{ فجعل } \frac{واصة}{ص} = ع \text{ فجد ايضا}$$

$$ع = \frac{واصة}{ص} - \frac{واصة}{ص} = \frac{واصة}{ص} - \frac{واصة}{ص}$$

وبأخذ التفاضل على مافي بند (٢٣) يوجد

$$ع = \frac{واصة}{ص} - \frac{واصة}{ص} = \frac{واصة}{ص} - \frac{واصة}{ص}$$

واذن يكون

$$\frac{واصة}{ص} = \frac{واصة}{ص} - \frac{واصة}{ص}$$

ثم انصرف هذه المعادلة في معادلة (١٢٥) فجد على مافي بند (٢٤)

$$\frac{واصة}{ص} = \frac{واصة}{ص} - \frac{واصة}{ص} \text{ أو } \frac{واصة}{ص} = \frac{واصة}{ص}$$

وبواسطة هذه المقادير توول كمية نصف قطر الانحناء الى

$$ق = \frac{\left( \frac{واصة}{ص} \right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{واصة}{ص}} = \frac{\left( \frac{واصة}{ص} \right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{واصة}{ص}}$$

ويجعل

\* (١٦٣) \*

$$\begin{aligned} \text{طد} - \text{ر} &= \text{قوس م} \text{ر} + \sqrt{\text{و} - \text{و}} \text{ أو} \\ \text{طد} - \text{ر} &= \text{قوس م} \text{ل} - \text{قوس م} \text{ل} + \sqrt{\text{و} - \text{و}} \\ &= \text{طد} - \text{قوس م} \text{ل} + \sqrt{\text{و} - \text{و}} \end{aligned}$$

وعلى ذلك يكون

$$\text{ر} = \text{قوس م} \text{ل} - \sqrt{\text{و} - \text{و}}$$

وهذه المعادلة هي معادلة سكلويد فيعلم من ذلك أن مفرد السكلويد سكلويد آخر  
 \* ٢٠٦ \* ويمكن اثبات بالوجه الآتي على أن المفرد (شكل ٤٦)  
 سكلويد ولذلك نقول عندنا

$$\begin{aligned} \text{قوس لم} + \text{قوس م} \text{ر} &= \text{طد} \text{ فيكون} \\ \text{قوس لم} &= \text{طد} - \text{قوس م} \text{ر} \end{aligned}$$

وغير ذلك

$$\text{قوس م} \text{ر} = \text{قوس م} \text{ر} = \text{ار} \text{ كما في بند (٩٩)}$$

فإذا وضعنا هذا المقدار في المعادلة السابقة حدث

$$\begin{aligned} \text{قوس لم} &= \text{طد} - \text{ار} = \text{ا} - \text{ار} \text{ أو} \\ \text{قوس لم} &= \text{ل} \end{aligned}$$

وهذه هي خاصية السكلويد

\* (في تغيير المتغير غير المعلق) \*

\* ٢٠٧ \* متى يفرض قانون مشابه لا على  $\frac{dy}{dx}$  بل على  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}$  فليس يمكن حذف تلك المتكررات إلا بمساعدة معادلة للمعنى  $y = vx$  فليكن  $y = vx$   
 هذا القانون عليه ومثاله أن يطلب ما يؤول إليه قانون

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$$

\*(١٦٢)\*

وإبرءة كرون أ ح + م ه = ار = قوس م س يمكن وضع  
لماملة الاخيرة هكذا

$$ر = قوس م س + م ه \dots\dots\dots (١٢٦)$$

واذا مددنا س ر وأخذنا س ر ل = س ر = ر و رسمنا نصفاً  
محيط س ر م ل على س ر ل م تر هذا النصف محيط بنقطة م بسبب تساوى  
وترى م س و م ر و يوجد اذ ذلك

قوس م س = قوس م س و م ه = م ه  
فنضع هذه المقادير فى معادلة (١٢٦) فيوجد

$$ر = قوس م س + م ه \text{ واذن يكون}$$

$$ر = قوس م س + \overline{ر و - و} \dots\dots\dots (١٢٧)$$

وهذه هى المعادلة التى توجد بين ابعاد اك ر و كم = و  
لنقطة ما م من المقروء فنقول الآن الرأسى ر = و (شكل ٤٦)  
بكمية دا مساوية ايضا الى ر و نرسم من نقطة ا خط ا م  
موازيا لخط ا د ونحول النقطة الاصلية ا فى ا و ليكن لاجل ذلك  
ا ك = ر و كم = و فنجد لاجل الافق ا ك = ا د - اك أو

$$ر = \frac{1}{2} \text{ المحيط الراسم } - اك \text{ أو}$$

$$ر = ط ر - ر$$

وبالنظر الى الرأسى و يوجد

$$م ك = ا د - كم \text{ أو}$$

$$و = ر - و$$

ويستخرج من هذه المعادلات

$$ر = ط ر - ر \text{ و } و = ر - و$$

وبواسطة هذه المقادير نؤول معادلة (١٢٧) الى



بذلك كرم الله تعالى النبي صلى الله عليه وسلم وأهل بيته الطيبين الطاهرين من آل أبي طالب رضي الله عنهم وأئمة الهدى من بعدهم صلوات الله عليهم أجمعين، فلهذا كان من مقتضى هذا العمل أن يخرج من معاملة القطع المكافئ

في ذلك تتنوع المذاكرات المتناضلة حينئذ وإذا نظرت كميات

قَدْرُونَ وَتَدْرِكُهُمَا تَانِ الْمَعَادِلَتَانِ بِأَخْذِ تَفَاضُلِ مَعَادِلَةِ الْمُنْحَنِ مَرَّتَيْنِ  
عَنِ التَّوَالِي

\* ٢٠٨ \* متى ترأى (هـ) أنه بواسطة العمليات الجبرية من أن تكون  
موجودة تبع (و) أنه كالم القانون الآتى

صه (واسه + واسه) ..... (۲۱)







وبعد رجوع من هذه المعادلة

$$(١٢٩) \dots\dots\dots \frac{\frac{وا}{صه}}{\frac{وا}{سه}} = \frac{وا}{سه}$$

أناخذ انفاضل الثاني الى صه ونفعل بالطرف الثاني كما فعل بالكسور في بند (١٩) فيوجد

$$\frac{وا}{سه} = \frac{\frac{وا}{سه} - \frac{وا}{صه}}{\frac{وا}{صه}}$$

ولمزم وا في هذه الكمية استعمالان احدهما بيان ما يكون المتغير غير المعلق ٤ والاخر دخوله في الكمية المذكورة كعلامة جبر (والمراد بعلامة الجبر هنا كمية جبرية) ويمكن أن لا نعتبر وا الا بالمعنى انشائي مادامت ٤ هي المتغير غير المعلق هذا والكمية السابقة تختصر باسقاط المضروب المشترك وا ٤ يتجاذبها هكذا

$$\frac{وا}{سه} = \frac{وا}{صه} - \frac{وا}{صه}$$

واذا قسمنا على وا ٤ صارت

$$\frac{وا}{سه} = \frac{وا}{صه} - \frac{وا}{صه}$$

\* ٢١٥ \* وبالعمل هكذا على معادلة (١٢٩) يرى انه باخذ ٤

متغيرا غير معلق يصير الطرف الثاني للمعادلة مطابقا للاول (ومعنى مطابق للاول عينه حدثا بحد) ويعلم من ذلك انه متى تؤخذ ٤ للمتغير غير المعلق

لا يكون

\* (١٧١) \*

وإذا أخذنا تفاضل هذه المعادلة واعتبرنا  $\frac{1}{\omega}$  ثابتة على ما في بند (٢٨) حيث كانت  $\omega$  هي المتغير غير المعلق وأجرينا العمل كما في قاعدة الاسس وجدنا

$$0 = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} + \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}}$$

ومنه يستخرج

$$\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}$$

وإذا وضعنا حينئذ مقدار  $\frac{1}{\omega^2}$  أو مقدار  $\frac{1}{\omega^2}$  المستخرج من هذه المعادلة في معادلة (١٣٠) يوجد في الحالة الأولى

$$\frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega^2}$$

وفي الحالة الثانية

$$\frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega^2}$$

\* ٢٢٠ \* لم نعتبر فيما سبق إلا المصطلح  $\frac{1}{\omega^2}$  من انتفاضلين

$\frac{1}{\omega^2}$  و  $\frac{1}{\omega^2}$  ولكن إذا كان القانون يحتوي على مكررات تفاضلية

برتب عليها نعين مقادير  $\frac{1}{\omega^2}$  و  $\frac{1}{\omega^2}$  ... الخ

التي تتسبب للحالة التي يكون فيها  $\omega$  و  $\frac{1}{\omega^2}$  دوالاً لمتغير ثابت غير  
معلق بكميات مشابهة لتلك المستعمات

\* (في طريقة الصغريات جذاً) \*

في الحالة الاعتيادية الى

$$\frac{\frac{3}{2} \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 \right)}{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \text{نق}$$

\* ٢١٧ \* ولكن اذا كان يراد أن يكون الرأسى صه يبين المتغير غير المعلق عوضا عن أخذ صه لذلك المتغير ننظر أن هذا الشرط يكون متبينا بمعادلة صه = ٤ وباخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين يوجد

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad ٠ = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

وتبين المعادلة الاولى من هاتين المعادلتين ان صه هو المتغير غير المعلق وهذا لا يغير القانون ولكن الثانية تبين ان  $\frac{1}{\frac{1}{2}}$  يجب أن يكون صفرا وتؤول معادلة (١٣٠) حينئذ الى

$$\frac{3}{2} \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \text{نق}$$

\* ٢١٨ \* ولينتبه انه متى تكون صه مبينة للمتغير غير المعلق ووجد بناء على ذلك  $\frac{1}{\frac{1}{2}} = ٠$  استدلل بهذه المعادلة على ان  $\frac{1}{\frac{1}{2}}$  ثابتة وينتج من ذلك عموما أن تفاضل المتغير المنظور متغيرا غير معلق كقيمة ثابتة

\* ٢١٩ \* واخيرا اذا أخذ القوس للدلالة على المتغير غير المعلق يوجد

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

وتتربع الطرفين وقسمتهما بعد ذلك على  $\frac{1}{\frac{1}{2}}$  يوجد

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

واذا

(١١٣)\*

زدت ع نقص الكسر واذن بصير هذا الكسر على الاطلاق صفرا  
مقي تصير ع غير منتظمة ولذا يستط نظر الى س نتي تكون غير منتظمة  
بناظر الى ح

\* ٢٢٥ \* الكميستان الصغيرتان جتا لا تكون نسبتهما صفرا  
لانه يوجد

$$\frac{5}{5} : \frac{5}{5} :: 7 : 7$$

وزيادة على ذلك يعرف ان الكميستان الصغيرتين جتا يمكن اعتبارهما كالكميستان  
الكبيرتين جتا ولذا لا تكون النسبة  $\frac{5}{5}$  في  $\frac{5}{5}$  كميستان الصغيرتين جتا  
المرموز لهما برمز  $\frac{5}{5}$  و  $\frac{5}{5}$  صفرا وهذا ما يجب ان يكون  
باعتبار النهايات

\* ٢٢٦ \* متى تكون كمية س صغير جتا با نسبة الى مقدار منته  
ومنه ح فالمرجع س يكون صغير جتا بالنسبة الى س لانه يستدل بتناسب

$$1 : 1 :: 7 : 7$$

ان س تدخل في س مرارا عدتها كعددة دخول س في الواحد  
يعني عدد مرار غير منته

ويثبت كذلك بوضحة تناسب س : س :: س : س انه متى كان س  
صغير جتا بالنسبة الى س كان س جتا با نسبة الى س  
ولذلك انقسمت الصغيرات جتا الى درجات رمرت بالترتيب والكمية س  
في الامثلة السابقة هي صغير جتا بدرجة وفي س صغير جتا  
بدرجة ثاية و س صغير جتا بدرجة ثاشة وهكذا

\* ٢٢٧ \* ويسأل انه متى كانت س صغيرة جتا  
بالنسبة الى ح كان كذلك س مضروبة في كمية محدودة  
س وثبات ذلك ان تقول حيث ان كمية س يمان اعتبارها

\*(١٦١)\*

\* ٢٢١ \* اخرج من هنا واعتباره يؤزل الى تقرير هذه القضية  
 من حيث ثباتها لا تكون غير منتهية او غير محدودة ولذا يجب  
 ان يكون من كمية  $x$  اذا اعتبرت من غير منتهية والا  
 لتثبت من الزيادة يصار هذا الى تقريرنا  
 \* ٢٢٢ \* رجعت هذه القضية هي الأساس لم أن اثبتنا  
 ببات كاف فيقول  
 لكن معادلة

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m \quad (١٣١) \quad \text{م} \dots\dots\dots$$

فبضرب هذه المعادلة في  $x$  منه يحدث

$$1 + \frac{x}{y} = mx \quad (١٣٢) \quad \text{م} \dots\dots\dots$$

هذا واذا فرضنا ان  $x$  تصير غير منتهية وصل كسر  $\frac{x}{y}$  الى غاية درجة  
 نقصانه فيؤول لاحتماله الى صفر ونصير معادلة (١٣١) حينئذ هكذا

$$m = \frac{1}{y}$$

ونضعنا هذا المقدار في معادلة (١٣٢) حدث

$$1 + \frac{1}{y} = m$$

وذلك يورى ان كمية  $1 + \frac{1}{y}$  تؤول الى  $m$  متى تكون  $y$  غير منتهية وهذا ما أردنا اثباته

\* ٢٢٣ \* كمية  $x$  التي تكون من بالنسبة اليها غير منتهية هي  
 المسماة صغيرة جدا بالنسبة الى  $m$

\* ٢٢٤ \* حيث اننا اعتبرنا الانسب الكميات فالاثبات السابق  
 يتبع ايضا متى يكون كمية  $x$  مقدار منته بشرط ان مقدار  $x$  يكون  
 صغيرا جدا بالنسبة الى كمية  $m$  وقضايا الكسور تجعل هذه الدعوة  
 في غاية الوضوح لانه اذا قارنا كمية  $x$  الكمية بكسر  $\frac{1}{m}$  يتحقق انه كلما

زادت

\*(١٧٥)\*

النتائج المستجدة والاوّل يكون هو تفاضل هذه الدالة

\* ٢٣٢ \* فلايجاد تفاضل  $ح$  سه مثلًا نغير في هذه الدالة سه  
بكمية  $سه + و$  سه قصير  $ح$   $(سه + و سه) = ح سه + ح و سه$   
واذا طرح منها  $ح سه$  كل الباقي وهو  $ح و سه$  هو التفاضل المطلوب  
\* ٢٣٣ \* نبحث ايضا عن تفاضل  $ح سه$  ولذا نغير سه بكمية  
 $سه + و سه$  فيوجد  $ح (سه + و سه)$  ثم نطرح من هذا ناتج  
كمية  $ح سه$  ونخل ونختصر فنجد أولا

$$ح سه + و سه + ح سه + و سه + ح سه + و سه$$

وفي هذا يجب اسقاط كمية  $ح و سه$  حيث انها صغيرة جدًا بدرجة ثالثة  
ولا يمكن أن تزدادها  $ح سه + و سه$  وحيث ان  $ح سه + و سه$  صغيرة  
جدًا بدرجة ثانية فينبغي اسقاطها كذلك من جنب  $ح سه + و سه$  التي هي  
صغيرة جدًا بدرجة أولى ويبقى  $ح سه + و سه$  لاجل تعادل سه بـ  $و سه$   
\* ٢٣٤ \* يؤخذ تفاضل أي دالة نغير سه من بعد القاعدة السابقة  
بأن نسقط الصغيرات جدًا بدرجة عليا ويؤول هذا الى حفظ الحد الاول من  
الحل كما فعل في طريقة النهايات

ومثاله لايجاد تفاضل  $ح سه$  ينظر أنه عوضا عن العمل بطريق النهايات هذا

$$\frac{ح(سه - و) - (ح سه - ح و سه)}{سه} = ح سه + ح و سه + ح سه + ح و سه + ح سه + ح و سه + \dots$$

الذي يحدث منه في حالة التحديد والنهاية  $ح سه + ح و سه = ح سه$

لاجل التفاضل يفعل بطريق الصغيرات جدًا هكذا

$ح(سه + و سه) = ح سه + ح و سه + ح سه + ح و سه + ح سه + ح و سه + \dots$   
وبطرح الدالة الاولى يبقى

$$ح سه + ح و سه + ح سه + ح و سه + \dots$$

\* (١٧٤) \*

كسر مقامه يكون غير محدود قدر من لها هذا الرمز  $\frac{ه}{و}$  ومعلوم ان  $\frac{ه}{و}$  او  $\frac{و}{ه}$  شيئا واحدا وهذه الكميات ليست الا عدما بالنسبة الى  $\frac{ه}{و}$   
 \* ٢٢٨ \* الصغير جدًّا بدرجة ولى يسقط متى يكون جانب كمية محدودة لانها لا تزداد به وكذا يسقط الصغير جدًّا بدرجة ثانية الذى يكون في جانب صغير جدًّا بدرجة أولى وهلم جرا  
 مثلا اذا كت هذه الكمية

$$\frac{ه}{و} + \frac{ه}{و} + \frac{ه}{و} + \frac{ه}{و}$$

وكان فيها  $\frac{ه}{و}$  صغيرا جدًّا بدرجة أولى كان  $\frac{ه}{و}$  صغيرا جدًّا بدرجة ثانية و  $\frac{ه}{و}$  صغيرا جدًّا بدرجة ثالثة ويجب حينئذ اسقاط  $\frac{ه}{و}$  لان  $\frac{ه}{و}$  لا يمكن أن يتردد  $\frac{ه}{و}$  وحيث ان  $\frac{ه}{و}$  لا يزيد  $\frac{ه}{و}$  فيحذف ايضا وبالجملة يحذف  $\frac{ه}{و}$  كذلك حيث ان هذا الصغير جدًّا الذى هو بدرجة أولى لا يمكن أن تزداد به كمية  $\frac{ه}{و}$  المحدودة واذن يبقى  $\frac{ه}{و}$  فقط

\* ٢٢٩ \* الكميتان الصغيرتان جدًّا  $\frac{ه}{و}$  و  $\frac{ه}{و}$  حاصل ضربهما يكون صغيرا جدًّا بدرجة ثانية لانه يحدث من حاصل ضرب  $\frac{ه}{و} \times \frac{ه}{و}$  هذا التناسب

$$١ : \frac{ه}{و} :: \frac{ه}{و} : \frac{ه}{و}$$

وبه يستدل انه حيث كان  $\frac{ه}{و}$  صغيرا جدًّا بالنسبة الى ١ فحاصل الضرب  $\frac{ه}{و}$  يكون صغيرا جدًّا بالنسبة الى  $\frac{ه}{و}$  واذن يكون صغيرا جدًّا بدرجة ثانية

\* ٢٣٠ \* وينبئ ايضا ان حاصل ضرب الثلاث صغيرات جدًّا بدرجة أولى سين صغيرا جدًّا بدرجة ثالثة

\* ٢٣١ \* يمكن الآن شرح نظر التفاضل من بعد طريقة الصغيرات جدًّا ولاجل ذلك نفرض ان متغير  $\frac{ه}{و}$  ياخذ في دالة تماز زيادة صغيرة جدًّا تبين برمز  $\frac{ه}{و}$  بحيث تتغير  $\frac{ه}{و}$  بكمية  $\frac{ه}{و} + \frac{ه}{و}$  والفرق بين

النتائج



\* (١٧٦) \*

وحيث انه يجب اسقاط الصغيرات جدا بدرجات اعالية فلا يحفظ الحد

ح و س الذي يكون هو التفاضل المطلوب

\* ٢٣٥ \* ولايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين ص و ع  
يفرض ان ص تصير ص + (و) ص و ع تصير ع + (و) ع  
مى تتغير ص بكمية س + (و) س فاصل الضرب ص ع يصير  
حينئذ محولا الى (ص + (و) ص) (ع + (و) ع) وبجمله وطرح ص ع  
منه يبقى ص (و) ع + (و) ص + (و) ع وحيث ان الحد الاخير  
لهذا الناتج صغير جدا بدرجة ثانية فيسقط ويوجد لتفاضل ص ع  
كمية ص (و) ع + (و) ص

\* ٢٣٦ \* ويستخرج من بعد ذلك تفاضل حاصل ضرب جملة  
مضاريب وبعده تفاضل س + (و) س فاصيات التي اتبعناها حين استعمالنا  
طريقة النهايات

\* ٢٣٧ \* تفاضل كية س يستخرج ايضا بسهولة متى نحل

كمية س + (و) س وهذا الحل ينال كل كية س + هـ من بعد بند (٣٦)

ثم يبحث عن مقدار س + (و) س ولا يحفظ منه الا حده

الاول وتسقط الحدود الباقية حيث انها صغيرات جدا بدرجات واطية عن  
درجة الحد المحفوظ ويستخرج من بعد هذا تفاضل لوغا س كما بين

\* ٢٣٨ \* وبالنظر لتفاضل جاسه يوجد

ح (س + (و) س) - حاسه = حاسه جتا (و) س + ج (و) س جتا س - حاسه  
وبسبب كون قوس (و) س صغيرا جدا يكون

جتا (و) س = ١ و ج (و) س = (و) س

ويوجد بواسطة هذه المقادير

و . جاسه = (و) س جتا س

٢٠ \* لما كانت قضية تيلور كثيرة النوائد والمنافع خصوصا حل الموال الى متسلسلات لاح للمعلم لاجرايج كون اصول حساب تصير في هذه القضية وتحدث منها اوس ثم اتها من غير استعمال نماضل بالطريقة لانية رهى هذه

$$\text{تكن صه} = \text{د}(\text{سه} + \text{هه})$$

لنة نوزول باطسع الى دسه متى يجعل فيها هه = ٠  
شوقعا متى كان الجزء المحتوى على هه في هذه المعادلة مكررا  
وانيسنه برمن نه فن ثم يكون

$$\text{د}(\text{سه} + \text{هه}) = \text{سه} + \text{عه}$$

بكن أن تكون دالة لكمية هه فاذا رمزنا برمن عه  
به ع حين يفرض فيها هه = ٠ وكان كه هه هو الجزء  
او يرتبط بكمية هه فبعد ايضا ع = ٠ + كه  
هذا التبيان توجد هذه المعادلات المتوالية

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{عه}$$

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{كه}$$

$$\text{ك} = \text{ك} + \text{رهه}$$

$$\text{الخ} \quad \text{الخ} \quad \text{الخ}$$

دار ع المعلوم بالمعادلة الثانية في معادلة الاول يحدث

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{عه} + \text{كه} + \text{هه}$$

ضع مقدار ك المعلوم بالمعادلة الثالثة في هذا الناتج

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{عه} + \text{كه} + \text{هه} + \text{رهه}$$

هكذا ووضع د(سه + هه) محل صه يوجد عموما

\* ٢٤١ تفاضل القوس من منحني ذي احدائيات قطبية يوجد ايضا  
 بعناية السهولة باعتبار الصغيرات جدا ولذلك نفرض (شكل ٨٢)  
 ان  $س س'$  و  $م م'$  يكونان قوسين أحدهما وهو الاقل من الدائرة  
 المرسومة بنصف قطر يساوي الواحد وثانيهما من الدائرة المرسومة بنصف  
 قطر يساوي  $ع$  ويكونان محصورين في الزاوية الصغيرة جدا  $م م'$   
 المنشكلة من نصفي قطرين احتراقين فنثلث  $م م' م$  يمكن نظره كمثلث مستقيم  
 قائم زاوية  $م$  ويوجد حينئذ

$$\overline{م م'} = \overline{م م} + \overline{م م'}$$

وبمراجعة كون  $م م' = و ع$  و  $م م$  يساوي  $ع و ع$  على

مقتضى تناسب  $١ : و ع :: ع : م م$   
 يمكن أن نبدل  $م م$  و  $م م'$  بتباديرها ونضع  $و قو$  محل  $م م'$  فنجد

$$\overline{و قو} = \overline{و ع} + \overline{ع قو}$$

وبمقارنة مثلث  $م م' م$  المذكور بمثلث  $م ا ط$  يحدث لنا تحت الظل  
 للمنحنى القطبي بواسطة تناسب

$$م م' : م م :: ا م : ا ط$$

واذا غيرنا  $ا م$  في هذا التناسب بنقط  $ا م$  الذي لا يختلف عنه الا بالصغير  
 جدا حدث

$$و ع : ع قو :: ع : ا ط \text{ ومنه يستخرج}$$

$$ا ط = ع \frac{و ع}{ع قو}$$

طريقة لاخراج لاثبات اصول حساب التفاضل من غير اعتبار  
 النهايات والصغيرات جدا وكل كمية يجري حذفها



$$2(s+h) = s + h_1^2 + h_1^3 + h_1^4 + \dots + 0.1 \quad (1.33)$$

\* ۲۴۴ \* فیوض ہ + ے اول محل ہ فی محل

درسه +  $h_2^2$  +  $h_1^2$  + ..... الخ يوجد

$$(134) \quad 1 + (c+h) + (c+h)^2 + (c+h)^3 + (c+h)^4 + (c+h)^5 + (c+h)^6 + \dots$$

وبكتابة الحديثين الاولين فقط من كل من هذه الكميات ذات الحديثين يحدث

•. (130)  $1 + \epsilon \sqrt{r} + \sqrt{r} + \epsilon \sqrt{r} + \sqrt{r} + \epsilon + \sqrt{r} + \epsilon$

ثم لايجاد الناتج من وضع  $س + س$  محل  $س$  في كمية  $دس + س$  عه

$+k_1h_1 + h_2 + \dots$  الخ نراعى ان الريادة ه موجودة لا محالة في هذه

المسألة ولا تدخل في دسه ولا في المكدرات ح ك س و الح  
ا د ا د ا د ا

التي هي كميات لا يمكن أن تحتوى الا على سه واذلك يمكن اعتبارها دوال

لهذا التغير أعني من حيث كانت معادله  
فوضع من + في محل من غير







سبب مثلاً حقيقة  $\frac{واصة}{واسه}$  في الدالة  $سه$  تحال  $(سه + هـ)$  ابتانون الكمية ذات

سنتين فيوجد  $سه + م سه + هـ$  الخ وحيث ان  $\frac{واصة}{واسه}$  يجب أن يكون

مبيناً مكرر القوة الاولى لكمية  $هـ$  في هذا الحل يوجد  $\frac{واصة}{واسه} = م سه$

ومن ثم يؤول الامر الى امكان ايجاد حل الدوال المتنوعة الممكن بيانها بالجر  
بواسطة الطرق الحسابية وهذه الطرق لا تختلف عن الطرق التي شرحناها لحل  
الدوال على اختلافها والتي ينتج منها ما بقي بعتةها ببعضها وبذلك ينأ حلول

$سه + هـ$  و لوغا  $(سه + هـ)$  و جتا  $(سه + هـ)$  والخ  
\* ٢٥٠ \* ومن ثم صارت هذه الطريقة طريقة ثالثة من بعد ما توجد

اصول حساب التفاضل مبنية بوجه غير متعلق باعتبار الهيات والصغيرات  
جدا وكل كمية يحكم بحذفها ومع ذلك كله فلا غنى لهذه الطريقة عن طريقة  
الهيات لانه متى يجري تطبيقها ويراد مثلاً تعميم الابعام او السطوح  
وتعديل المنحنيات او ايجاد كميات تحب المماس وتحت العمودي الخ  
يستمر الدخول في الهيات أو الصغيرات جداً

\* ٢٥١ \* لاعتبار حلول الدوال المتنوعة  $(سه + هـ)$  أو  $سه + هـ$

و لوغا  $(سه + هـ)$  و جا  $(سه + هـ)$  و الخ التي تعلم من علم الجبر يقال حيث ان  
هذه الدوال محدودة العدد يسهل معرفة كون مكرر القوة الاولى لكمية  $هـ$   
في حلولها لا يكون صفراً ولا غير منته ما دام الى  $سه$  مقدارها غير المعين  
وذلك ينتج من الاشياء السابق لانه اذا فرضنا  $هـ = ٠$  في معادلة

$$د(سه + هـ) = دسه + هـ ك + هـ ا + هـ ب + هـ ج + هـ د$$

تقع حالتان وهما اما أن يعلم مقدار  $سه$  الداخل في  $هـ$  بمعادلة

متطابقة

\* (١٨٧) \*

في جميع المواضع التي كانت فيها  $س$  ولذا متى احتوت  $د$   $س$  على جذر  
كانت  $د$   $(س + هـ)$  مشتملة على هذا الجذر أيضا

فإذا كانت  $د$   $س = س^٢ + \sqrt[٢]{س}$  مثلا فإن الجذر يوجد نفسه في كمية

$$د (س + هـ) = س^٢ - (س + هـ) + \sqrt[٢]{س} + هـ$$

\* ٢٥٤ ولا يكون كذلك دائما إذا أخذت  $س$  مقدرا مخصوصا

(والمراد به متعينا) مثلا إذا كان  $\sqrt[٣]{س} = س - د$  يدخل في  $د$   $س$  بلزم

أن يشتمل  $د$   $(س + هـ)$  على جذر

$$\sqrt[٣]{س^٣ + هـ - د}$$

ولكن  $\sqrt[٣]{س^٣ - د}$  ينحذف من  $د$   $س$  بفرض  $س = د$

ولا ينحذف  $\sqrt[٣]{س^٣ - د + هـ}$  الداخل في  $د$   $(س + هـ)$  بهذا الفرض بل

يؤول إلى  $\sqrt[٣]{هـ} = هـ^{\frac{1}{٣}}$  واذن يشتمل حل  $د$   $(س + هـ)$  على جذر

لا يوجد في  $د$   $س$  ولا يمكن حله بحسب القوى الصحيحة لكمية  $هـ$

وعدم الامكانية هذه تتحقق بالمقادير غير المحددة التي تأخذها المكررات

التفاضلية مثلا إذا وجدت معادلة

$$ص = \sqrt[٣]{س^٣ - د}$$

فانه يكون باخذ تفاضلا

$$\frac{ص}{ص} = \frac{1}{3} (س - د)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[٣]{س^٣ - د}}$$

وبرى ان مقدار هذا المكرر التفاضلي بصير غير محدود متى نجعل  $س = د$

\* ٢٥٥ \* وليكن على العموم

$$د (س + هـ) = س + هـ + س^٢ + هـ^٢ + س^٣ + هـ^٣ + س^٤ + هـ^٤ + س^٥ + هـ^٥ + س^٦ + هـ^٦ + س^٧ + هـ^٧ + س^٨ + هـ^٨ + س^٩ + هـ^٩ + س^{١٠} + هـ^{١٠}$$

تتكون الدالة المذكورة متطابقة أو ثابتة لأنه يعرف أنه إذا كانت دالة  
بهذه الصورة  $S_1 - S_2$  مثلا أو كانت على صورة  $S_1 + S_2 - S_3$   
فإن وضع  $S_1 + S_2$  محل  $S_3$  يحدث ناتجا واحدا أبداً ويشاهد أن  
الدالة تكون في الحالة الأولى متساوية وتؤول في الثانية الى كمية ثابتة  $S_1 + S_2$   
وينبني على هذا وذلك أن تكرار القوة الأولى لكمية  $S_1 + S_2$  لا يمكن أن يكون صفراً  
في الأصل، العمومي بدانة ( $S_1 + S_2$ )

ولايستحيل فرض هذا المسمى مركب غير محدود لانه حين يكون الطرف الثاني لمعادلة (١٣٣) غير محدود يكون الطرف الاول كذلك يعنى انه يكون  $D = (S+H)$  وحيث ان  $D = S+H$  تتركب من  $S+H$  كما تتركب  $D$  من  $S$  فالحد الداخل في  $D = (S+H)$  الذى يجعلها غير محدودة يجعل ايضا  $D$  غير محدودة ومثاله انه اذا كانت  $D = (S+H)$  تحتوى على حد غير محدود وليكن  $S = H = (S+H)$  يقتضى أن تكون  $D$  محتوية ايضا على حد  $S = H = (S+H)$  يكون غير محدود كذلك وينتج من ذلك أن الدالة المفروضة تكون غير محدودة ولا نفرض ذلك

\* ٢٥٢ \* كميات دس و دس و دس والخ  
هي التي سماها لاجرائج الدالة الاولى والدالة الثانية والدالة الثالثة والخ  
الدالة س و على العموم نسمي بالدوال المشتقة وقد بين لاجرائج المذكور  
ايضا الدوال المشتقة بوجه آخر بابدال  $\frac{قاصه}{قاسه}$  برمز ص و  $\frac{قاصه}{قاسه}$   
برمز ص و  $\frac{قاصه}{قاسه}$  برمز ص وهم جزا

\* (في الحالات التي يخطر فيها قانون تيلور) \*

\* ٢٥٣ \* عموماً متى توضع س + ه محل س في الدالة المتغير س فان صورة هذه الدالة تبقى متحدة حيث ان س + ه تدخل





فهذا الحل يكون غير ممكن

وفي هذه الحالة يوضع من بعد القاعدة السابقة  $س = د$  محل  $س$

في معادلة  $د = س = د$   $س = د$   $س = د$   $س = د$  فيوجد

$$د (س + هـ) = د س + د هـ = د س + د هـ = د س + د هـ = د س + د هـ$$

وهذه المعادلة غير بدروس  $س = د$

$$د (د + هـ) = د د + د هـ = د د + د هـ = د د + د هـ = د د + د هـ$$

$$د (د + هـ) = د د + د هـ = د د + د هـ = د د + د هـ = د د + د هـ$$

ونحل هاتون اكمية ذات متدين بـ  $س = د$  في هذه المعادلة نرسل لاجل

الخصار لمكثرت التي تحدث في تلك تكون بدروس  $س = د$  و  $س = د$

رجد

$$د (س + هـ) = د س + د هـ = د س + د هـ = د س + د هـ = د س + د هـ$$

وهذا المقدار في المعادلة الاخيرة فتصير

$$د (د + هـ) = د د + د هـ = د د + د هـ = د د + د هـ = د د + د هـ$$

ويشاهد بهذا المثال انه بوضع  $س = د$  في بدروس  $س = د$

يمكن لداخل قوة او جلة قوى كسرية اكمية  $س = د$  ونحل بعد ذلك بدروس

الما قبل في اقله لان تكبر كذا في سر كل "اقل"  $س = د$   $س = د$   $س = د$

او جلة  $س = د$  وتكون هذه الحدود  $س = د$   $س = د$   $س = د$   $س = د$

\* ٢٥٨ \* وقد اثبت لا يربح ان حل  $د = س$   $س = د$   $س = د$   $س = د$   $س = د$

حدود متبوعة بقوة كسرية الى  $س = د$   $س = د$   $س = د$   $س = د$   $س = د$

ولذلك يفرض  $د (س + هـ) = د س + د هـ = د س + د هـ = د س + د هـ = د س + د هـ$

وحيث كان  $د = س$   $س = د$   $س = د$   $س = د$   $س = د$   $س = د$   $س = د$

توجد هذه الحلول الثلاث لدالة  $(س + هـ)$

\* (١٩٠) \*

درجة  $\gamma$  وهو أي الحد الذي درجته  $\gamma$  من ضمنها وجميع الحدود  
لاخر تصير غير محدودة

\* ٢٥٦ \* المفروض دالة للتغير  $s$  متبينة برمز  $s$   
ويراد تعيين حل  $\gamma$  ( $s + h$ ) في حالة فرضية  $s = \gamma$  ولدلت  
لرم كاتين ان تحسب حدوده تسلسلة

$$s + \frac{h}{s} + \frac{h^2}{s^2} + \frac{h^3}{s^3} + \dots + \frac{h^r}{s^r} + \dots$$

ولكن اذا صار يعمل هذا الحساب احد المكزرات التفاضلية غير محدود في حال  
فرضية  $s = \gamma$  فلا يبحث عن حل  $\gamma$  ( $s + h$ ) بنفسه تسلسلة تيلور  
وهاهي الطريقة اللازم استعمالها

يوضع  $s + h$  محل  $s$  في  $s$  فينتج تحتوى الحد الذي كان  
يشتمل على  $s - \gamma$  في المقام على  $s - \gamma + h$  ولا يصير غير محدود  
متى يجعل  $s = \gamma$  لكنه ينشأ عنه حد منبوع بقوة كسرية لكمية  $h$   
\* ٢٥٧ \* وليكن مثلاً

$$s = \gamma + h = \gamma + s - \gamma + h = \gamma + h$$

فباخذ التفاضل يوجد

$$\frac{h}{s} = \frac{h}{\gamma + h} = \frac{h}{\gamma} \left( 1 - \frac{h}{\gamma} + \frac{h^2}{\gamma^2} - \dots \right)$$

وبوضع هذه المقادير ومقادير  $\frac{h^2}{s^2}$  و  $\frac{h^3}{s^3}$  و الخ

في قانون تيلور بند (٥٥) يوجد

$$s + h = \gamma + h + \frac{h^2}{\gamma} \left( 1 - \frac{h}{\gamma} + \frac{h^2}{\gamma^2} - \dots \right) + \frac{h^3}{\gamma^2} \left( 1 - \frac{h}{\gamma} + \frac{h^2}{\gamma^2} - \dots \right) + \dots$$

وحيث ان الحد المضروب في  $h$  يصير غير محدود متى يجعل  $s = \gamma$

فهذا



$$\begin{aligned} \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^1 + \text{ك}^1\text{ه} + \dots + \text{م} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^2 + \text{ك}^2\text{ه} + \dots + \text{ن} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^3 + \text{ك}^3\text{ه} + \dots + \text{ع} \end{aligned}$$

لكن دس ينبغي أن تحتوى على جذور واحدة كدالة (س + ه)  
كما في بند (٢٥٣) فيلزم أن يكون لدالة س ايضا ثلاث مقادير مختلفة  
ك و ص و و بوضع هذه المقادير على التوالى محل دس يوجد حينئذ

$$\begin{aligned} \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^1 + \text{ك}^1 + \dots + \text{م} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^2 + \text{ك}^2 + \dots + \text{ن} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^3 + \text{ك}^3 + \dots + \text{ع} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^4 + \text{ك}^4 + \dots + \text{م} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^5 + \text{ك}^5 + \dots + \text{ن} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^6 + \text{ك}^6 + \dots + \text{ع} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^7 + \text{ك}^7 + \dots + \text{و} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^8 + \text{ك}^8 + \dots + \text{ز} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{دس} + \text{ه}^9 + \text{ك}^9 + \dots + \text{ح} \end{aligned}$$

واذن توجد لدالة (س+ه) بجملها تسع مقادير مختلفة بخلافها غير  
محلولة فانه لا يوجد لها الا بقدر ما لدالة س من المقادير وعلى ذلك يكون لها  
ثلاثة في الحالة الاتية وحينئذ لا يمكن أن يفرض ان حل د(س+ه)  
يحتوى على أس كسرى لكمية ه من غير الوقوع في المناقضة

\* ٢٥٩ \* وتسهل البرهنة ايضا على ان د(س+ه) لا يمكن  
أن تشتمل في حلها على حد متبوع بأس سلبى لكمية ه لانها اذا كانت  
يحتوى على حد كحد م ه<sup>-</sup> يوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ه}^1 + \text{ك}^1\text{ه} + \dots + \frac{\text{م}}{\text{ه}}$$

ويجعل



\*(١٩٤)\*

ولما كان هذا آخر ما أورده المؤلف في حساب التفاضل ان لنا أن نشرح  
المخطوطة المعبر عنها في باطن هذا الكتاب ثم نلخص ما يتضمنها لطيفة  
للمندرداد. المسألة تتعلق بعلم الضوء للامير بيك ناظر مدرسة الهندسة  
انخدني به ببرلاق فتقول

المخطوطة الاولى (بند ٥٩)

على كيفية ايجاد حل لوغاريتم  $s + h$

هاهي أحد الطرق المستعملة لايجاد لوغاريتم  $s + h$

يبحث اولاً عن لوغا  $(1+s)$  بالكيفية الآتية وهي أن يساوي لوغا  $(1+h)$   
بجملة حدود مرتبة بحسب قوى  $s$  بأن يراعى اولاً انه لا يوجد في هذه  
المتسلسلة حد غير متعلق بمتغير  $s$  لانه اذا وجد

$$\text{لوغا } (1+s) = c + s^1 + s^2 + s^3 + \dots + x$$

فهذه المعادلة لاتزال متحققة مهما كان متغير  $s$  وينتج منها انه يجعل  
 $s = 0$  فيها يوجد

$$c = \text{لوغا } 1 = 0$$

ولذا نضع

$$\text{لوغا } (1+s) = c + s^1 + s^2 + s^3 + s^4 + \dots + x \quad (1)$$

وبتغيير  $s$  بكمية  $z$  يوجد كذلك

$$\text{لوغا } (1+z) = c + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + x$$

وحيث كانت  $z$  حيث ما اتفقت فيمكن فرض هذه المعادلة  $(1+s)$  أو  
 $1 + s^1 + s^2 + s^3 + s^4 + \dots + x$  بين  $s$  و  $z$  ثم يستخرج منهما مقدار  $z$   
ويوضع في معادلة (١) فيوجد

$$\text{لوغا } (1+s) = c + s^1 + s^2 + s^3 + s^4 + \dots + x$$

وبواسطة الحل والترتيب بحسب قوى  $s$  يكون

لوغا



\* (١٩٦) \*

$$\frac{z}{s} = \frac{w}{s}$$

ومن ثم يكون تعاضل لوف  $s$  هكذا  $\frac{w}{s}$  وينظر ان ثابته  $z$  ليست  
اه اتيه س

\* الملاحظة السابعة (بند ٢٤٥) \*

على اتعاضدة الاساسية لطريقة المـ تــرات العبر المتعينة  
يمكن الاشبات بالوجه الآتى على انه متى تكون المعادلة التى كعادلة

$z s^2 + z s^3 + z s^4 + z s^5 + \dots = 0$  (٣) مثلاً  
متحققة مهما كانت  $s$  يلزم أن يكون كل من المكررات  $z$  و  $z s^2$  و  $z s^3$  و  $z s^4$  و  $z s^5$  صفراً لانه حيب كانت  $s$  تقبل اى مقدار كان يمكن وضع  $s = 10$   
وتؤول معادلة (٣) حينئذ الى  $0 = 0$   
ولما كانت  $z$  غير معلقة بمتغير  $s$  فتكون صفراً ايضاً متى لا تكون  $s$   
صفراً وينتج من ذلك ان معادلة (٣) تختصر الى هذه

$$z s^2 + z s^3 + z s^4 + z s^5 + \dots = 0$$

وبإسقاط المضروب المشترك  $s$  يبقى

$$z s + z s^2 + z s^3 + z s^4 + \dots = 0$$

ثم نطبق ما ذكر بخصوص معادلة (٣) على هذه المعادلة فيستخرج لنا ان  $z$   
تكون صفراً وبالمدامسة هكذا يظهر على التعاقب كون المكررات الاخر  
تكون كذلك

\* (في المفردات المأثلة للامبير) \*

في البحث عن منحنيات الانعكاس المستوية السماة كوستيك  
الملف المشترك لجميع الخطوط العمودية على خط منحن مستوي هو المستقي  
مفرد هذا المنحنى ونقطة تماس هذا الملف بكل عمود يقال لها مركز

الانحناء

\*(١٩٩)\*

نق + و/قو = نق + و/اق + و/قو جاب وبلاختصار يحدث

و/قو = و/نق + جاب و/قو ..... (١)

و وجد ايضا

زوية م ح م = ز = و/قو - وزوب م = و/م = و/قو جتاب  
و/قو

والكن بسبب تساوى زاويتى مثلثى موح و م ح و المتبر و يرجد  
زاوية م ح م + زاوية و ح م = زوية و م ح + زاوية و ا م ح  
واذن يكون بالاستبدال

و/قو = (ب + و/ب) + و/قو جتاب  
ب + نق + و/قو

المشتري من الطرفين يكون

و/قو = و/ب + نق + و/قو جتاب  
نق + و/اق

(نق + و/قو) و/قو = (نق + و/اق) (نق + و/قو) و/ب + (نق + و/اق) و/قو جتاب

وبجمل هذه الشروب و تناط سادود انشبهه على تنه ضلالت يدريت  
دون الواحد وتسمه جميع سادود على ما قو يحدث

و/ب = و/قو - جتاب ..... (٢)

ويوجد اخيرا

تقاطع م ح م = م ح م × م ح م و قنلاع م ح م = م ح م × م ح م

الانحناء المطابقة لاحد مفردات هذا المنحنى المائلة وليكن  $و$  تقاطع  $د م$  و  $ا م$  هذا وتجعل نقطة  $م$  مركزا ويعد هاعن نقطة  $م$  يرسم قوسا من دائرة ينتهى في  $ا$  على امتداد  $ا م$  ثم يرسم برمن قوسا من المنحنى  $م م$  المعدود من  $م$  نحو  $م$  ويرمن قوسا للقس من المنحنى  $ا م$  المحسوب من  $ا$  نحو  $ا م$  ويرمن قوسا لنصف قطر الانحناء العمودى  $د م$  ويرمن قوسا لنصف قطر الانحناء المائل  $ا م$  ويرمن ب لزاوية  $د م ا$  الواقعة بين نصفي قطري الانحناء هذين ويرمن  $ع$  لذى الاربعه اضلاع المحدود بخطوط مستقيمة ومنحنية  $م د م$  ويرمن  $ع$  لذى الاربعه اضلاع  $م ا م ا م$  فاذا فرضنا نقطة  $م$  قريبة جدا من نقطة  $م$  فنقط  $د$  و  $ا$  تكون كذلك قريبة جدا لنقط  $د$  و  $ا$  واقواس  $د م$  و  $ا م$  يمكن اعتبارها كالاتدادات المستقيمة لخطى  $د م$  و  $ا م$  على الولا ومساحات  $م د م$  و  $م ا م$  يمكن اعتبارها ايضا كقطاعات بسيطة او كثلثات كذلك وما كن خط عمودى على  $ا م$  او على  $ا م$  فيوجد في هذه الحالة

$$\begin{aligned} م م &= و ق و و د م = و ق و و ا م = و ق و و ا م \\ م د &= ق و + و ق و و م ا = ق و + و ق و و ا م = ق و + و ق و و ا م \\ &\text{ثم بعد ذلك يوجد ان} \\ م ا &= م م ج ت ا ب = و ق و ج ت ا ب و م ا = م م ج ا ب = و ق و ج ا ب \\ &\text{ولكن} \end{aligned}$$

$$م م + م ا = م ا = م ا = م ا + م ا$$

فيوجد بالوضع حيثند



و  $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$  وقوة جـ  
رباساً، ما لحدود المشتبهة على القوى الثابتة للتفاضلات يكون

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ وقوة جـ}$$

وهذه التوزيعات المصنفة لا يجب ان يلاحظها الطرق الاعتيادية الهندسية  
المحيطة به، بل هي مشهورة كما هو مشروح رسمه ولكن ييسر في جميع الحالات  
أن تعبر بها العلامات التي تستدعي احوالاً خصوصية يمكن ايجادها  
فيها

و يوجد لاجل المفردين المائتين للمحن واحد مفروض جملتان من المعادلات  
المماثلة، يعني انه بالتأشير بالعلامات على الصور المتعلقة بالمفرد الثاني  
المائل نجد بين القوايين الاخر هذه الاربع معادلات

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ وقوة جـ}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ وقوة جـ}$$

ويمكن فرض كون انصاف أقطار الانحناء لا أحد الجملتين تكون الاشعة الساقطة  
المماس جميعها لا أحد المفردات المائلة والمنحني المفروض يكون هو المنحني المعكس  
او الفارق للذاتين المتجانستين بشدة مختلفة وكون انصاف الاقطار الانحنائية  
المائلة للجملة الاخرى تكون هي الاشعة المنعكسة او المنكسرة عندما يلتقي  
هذا المنحني والمماس جميعها بالمفرد المائل الآخر الذي يكون بهذا الوجه هو  
الأكوسيتيك بالانعكاس او بالانكسار حال كونه متكوناً من انصاف الاقطار هذه

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ وقوة جـ}$$

التي فيها رمزاً ف و ف يبينان عددين ثابتين لا يختلفان في حالة  
الانعكاس الخصوصية عن بعضهما الا في الاشارة بالاربع معادلات المرقومة

\* (٢٠٣) \*

وان نق يكون غير محدود آت تلك لمعادلة بالاختلاف

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{k} \text{ الذي يحوط منه } \frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \quad (1)$$

وجاءت تكون بعد المتعة الشعاعية و المتعة الحثية من المتعة  
المعادل في هذه الحثية من المتعة الحثية من المتعة الحثية  
الأكبر

وان كانت شعاعية بعد ذلك من الحثية من الحثية من الحثية  
مرة اوجدة مرت الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
يتميز حيث كان الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
الذي كون دشرة من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
بواسطة الفرق في الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
اعتبر معاً في (٢) و (٣) الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
الناتج من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية

ولا بد ان تنفع على كيفية الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
و الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
و الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
الرواي المستوط في الحثية من الحثية من الحثية من الحثية  
و في الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية من الحثية

المختنى الفاصل

وزرصعنا معادلة (٦) بهذه الصورة

$$\frac{\text{جـ بـ جـ تـ ا ب} - \text{جـ ا ب جـ تـ ا ب}}{\text{نـ}} = \frac{\text{جـ ا ب جـ تـ ا ب}}{\text{نـ}} - \frac{\text{جـ ا ب جـ تـ ا ب}}{\text{نـ}}$$

ووضع في استدار جـ المستخرج من معادلة (٥) عوضا عنه صارت  
تلك المعادلة منتظمة على جـ ونؤول الى

$$\frac{\text{بـ جـ تـ ا ب} - \text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}} = \frac{\text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}} - \frac{\text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}} \dots \dots (٧)$$

واذا فرضنا الان ان زاوية السقوط تكون صفرا فالمعادلة (٥) تبين ان زاوية  
الانكسار تكون كذلك ولذا يوجد

جـ تـ ا ب = جـ تـ ا ب = ١ وبه تؤول معادلة (٧) الى

$$(٨) \dots \dots \dots \frac{\text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}} = \frac{\text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}} - \frac{\text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}}$$

وحيد من ذمق تكون الاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة فان هذه

المعادلة تحدث بالسهولة التامة النقطة التي توجد على نصف القطر العمودي من

الكوسيتيك بالانكسار وهذه النقطة هي التي تسمى بالنقطة الاحتراقية متى يكون  
المختنى العاقل دائرة

واذا فرض في حالة الدائرة ان النقطة الشعاعية تكون على بعد غير محدود

فالمعادلة (٨) تؤول الى

$$\frac{\text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}} = \frac{\text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}} - \frac{\text{بـ جـ ا ب}}{\text{نـ}} \dots \dots \dots (٩)$$

وهذا تعرف موضع النقطة الاحتراقية للاشعة الموازية وتسمى هذه

النقطة الاحتراقية في هذه الحالة النقطة الاحتراقية الاصلية

واذا فرض في معادلة (٨) ايضا ان الخط العاقل يصير خطا مستقيما

$$\text{جَاب} = \text{جَاب} = \frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = ۱$$

واذن يمكن اعتبار جاب جاب  
بأي جنس يريد تعبيره فلهذا قد دلت  
في العادة

ويستخرج من معادلتی (۱) و (۲) بقول

$$\frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = \frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = ۱$$

$$\frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = \frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = ۱$$

$$\frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = \frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = ۱$$

و من اجل اننا نعلم ان ما تحت الخطا جاب و ما فوقه قَو

فلهذا لا تعني الساقطة **جَاب** و ما فوقه قَو

$$\frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = \frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = ۱$$

$$\frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = \frac{\text{قَو} - \text{قَو}}{\text{قَو} - \text{قَو}} = ۱$$

و من طلب ما يكون الناتج في المصطلح حتى يتبع

و لا تلاق بعد ان اسار في مسألة اخرى

تصديقه (۱۲) بهذا سبب

\*(٢٠٤)\*

$$\frac{\text{جاب}}{\text{جاب}} = \text{نق} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جاب}}{\text{جاب}} = \text{نق}$$

$$\frac{\text{فجاب} - \text{فجاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{فجاب}}{\text{نق}} - \frac{\text{فجاب}}{\text{نق}}$$

$$\frac{\text{فجاب} - \text{فجاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{فجاب}}{\text{نق}} - \frac{\text{فجاب}}{\text{نق}}$$

ويستخرج من الأخيرتين

$$\frac{\text{فجاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{فجاب}}{\text{نق}} + \frac{\text{فجاب} - \text{فجاب}}{\text{نق}}$$

$$\frac{\text{فجاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{فجاب}}{\text{نق}} - \frac{\text{فجاب} - \text{فجاب}}{\text{نق}}$$

ولكن هنا نق و نق لهما جهة واحدة تشتمل على تقطعي السقوط  
فاذن يكون البعديين هاتين المتطبتين الأخيرتين مساويا لجمعهما او لفرقتهما  
وبالرمز يحرف هـ لهذا البعدي وجد حينئذ

$$\frac{\text{فجاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{فجاب}}{\text{نق}} + \frac{\text{فجاب} - \text{فجاب}}{\text{نق}} \quad (١١)$$

وهو القانون الذي نخدم باعتبار نق فيه مجهولا لايجاد الكوستيك  
الذي يحدث من انكسار بين متوالين بالمقط بلا واسطة من غير الاحتياج  
الى رسم الكوستيك المتوسط

اذا كان السطحان العاصلان وجهين لجسم واحد شفاف يلزم أن تربط  
بمعادلة (١١) المعادلة المضاعفة هذه

جاب

(٢٠٧)\*

وبذلك تتعين النقطة الاحتراقية في الانعكاسات لمؤثرية و  $\theta$  مؤثرية  
الاحتراقية الاصلية او النقطة الاحتراقية بالاشعة المتوازية توجد  
معادلة (٩)

$$n_1 = n_2 \sin \theta_2 \dots \dots (١٧)$$

واذا صار الخط المعكس مستقيما وكانت النقطة الشعاعية حيث ما تنفذ  
حدث

$$n_1 = n_2 \dots \dots (١٨)$$

وبالاجله فيتوصل بواسطة معادلة (١٥) الى تعيين جهة لكوستنيك انسى  
يحدث من عددا انعكاسات متوالية حيث ما تنفذ بدون الاحتياج الى رسم  
الكوستنيكات المتوسطة واما من قبل الخط الاپلانيك بالانعكاس فانه يكون  
معلوما (١٤) بمعادلة

$$n_1 + n_2 = n_3$$

يعنى ان هذا الخط يكون قطعاً ناقصاً او قطعاً زائداً بحسب ككون  
 $n_1$  و  $n_2$  متحدة في الاشارة او مختلفة فيها وعلى ذلك يكون تنظعا  
متساويين متى كانت احدى النقطتين المتساويتين بعيدة غاية و غاية

اذا فرض  $n_1$  ثابتاً في قوانين (٦) و (١) ووضع  $n_2 = 0$  فيها  
فان هذه القوانين تدخل وتنحصر في قوانين المعطيات المتساوية في مرسلاته  
للمعلم هاشيت في شأن الحالة التي يكون فيها  $n_2$  معكس او اصلي  
دائرة والاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة ولكن يرى هنا كذلك  
كون هذه القوانين لها مدلولات متساوية

ومن الجواب ان يثبت لم يفكر في شرحها وبسطها على ما في ذهنه كان يمكنه  
أن يعتبر في الحقيقة انه متى تنعكس او تنكسر الاشعة الساقطة بالاشعة ما  
يقابلتها منحنى اخر حيث ما انقضى يمكن نفاذ احد هذه الاشعة كصادر من

\*(٢٠٦)\*

$$\frac{1}{\text{ن}} - \frac{1}{\text{ن}'} = \frac{1}{\text{ن}''} - \frac{1}{\text{ن}'''} = \text{ثابتة} \dots\dots (14)$$

وهذه هي المعادلة التي لا ارتباط الكائن بين ابعاد  $\text{نق}$  و  $\text{نق}'$  لنقط مختلفة من المنحنى المطلوب عن نقطتين ثابتتين معلومتين فينتج من ذلك بسهولة ان معادلة ذلك المنحنى باحد ثبات عمودية ترتفع الى الدرجة الرابعة وانواع هذه المنحنيات كانت سمائة خطوط ابلانتيك للمعلم كتي الذي هي آ لها جملة مباحث غريبة في مراسلاته وفي كتبه أو دفاتره الخاصة

وجميع ما ذكر يطبق بلا واسطة على الانعكاس بفرض  $\text{ب} = - \text{ب}$  فقط الذي ينتج منه

$$\text{جاب} = - \text{جاء} \text{ و جتاب} = \text{جتاب} \text{ و ف} = - \text{ف}$$

وحيث ان  $\text{نق}$  كانت الاشعة الساقطة مماسة بكائيتها المنحنى واحد ورمزنا برمز  $\text{نق}$  لطول الشعاع الساقط المحسوب من ابتدا هذا المنحنى الى نقطة السقوط ورمز  $\text{نق}'$  لطول الشعاع المنعكس المحسوب من ابتدا نقطة السقوط الى الكوستيك ورمزنا اخيرا برمز  $\text{نق}$  لنصف قطر الانحناء للمنحنى المعكس في نقط السقوط توجد معادلة (٦) هكذا

$$\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ن}'} = \frac{1}{\text{ن}''} \dots\dots (15)$$

وهو قانون سهل لا جل رسم الكوستيك بالانعكاس بواسطة النقط متى يعلم المنحنى المعكس والمنحنى الذي تماسه الاشعة الساقطة وترجع الى هذه المسئلة المسئلة التي يعلم فيها منحنى جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه واذا اعتبرنا الشعاع الساقط العمودي على المنحنى المعكس بجذته توجد معادلة (٨) هكذا

$$\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ن}'} = \frac{1}{\text{ن}''} \dots\dots (16)$$

وبذلك



\* (٢٠٨) \*

نقطة تماسه بالأول من هذين المنحنين ونقطة سقوطه كاحدى نقط الدائرة  
الاتصافية للمنحنى الثانى بمعنى أن القوانين المنشئة لاجل الدائرة  
ولاجل الاشعة الساقطة من نقطة واحدة لاتزال موجودة ايضا بابدال  
نصف قطر الدائرة بنصف قطر الانحناء فى نقطة السقوط للمنحنى الذى هى  
الدائرة الاتصافية له وببدال بعد نقطة السقوط عن النقطة الشعاعية ببعد  
نقطة السقوط هذه عن نقطة تماس الشعاع الآتى اليها بالمنحنى المحيط بجميع  
الاشعة الساقطة وبغاية الضبط ينتقل من قضية التحرك فى الدائرة فى علم  
الميكانيكا الى قضية التحرك بطول منحنى ما بالوجه المشروح عنه

انتهى

المهندسون الأولون الذين اشتغلوا  
بقضية الكوسينكات لم يصيبوا  
فى فائهم حيث تخيل لهم امكان  
ابال المنحنى الميكس او الفاصل  
بالمماس له فى نقطة السقوط وانما  
تبين مطابقة قوانين لامير بقوانين  
بوتيت جواز ابدال هذا المنحنى  
بدائرة الاتصافية فى نقطة  
السقوط



